MA34A-02
Profesor: Pierre-Paul Romagnoli
Auxiliar: Rodrigo Dávila

CONTROL 1

1.- Un cartero tiene N cartas que entregar en N destinos distintos.

(i) Suponiendo que el cartero pasó a celebrar las fiestas patrias antes de hacer su recorrido y en consecuencia entrega cada carta en cualquiera de los N destinos posibles y ni siquiera recuerda los destinos que ya ha visitado. Calcule la probabilidad de que k cartas lleguen a su destino con k en $\{0, \ldots, N\}$.

(ii) Si el cartero estaba sobrio y entregó una sola carta en cada destino, pero algun gracioso desordenó las cartas. Calcule la probabilidad de que ninguna carta llegue a su destino.

2.- Se tienen tres discos A, B y C (ver figura 1), que se usan para obtener valores enteros entre 1 y 6 al hacer girar las flechas en sus centros.

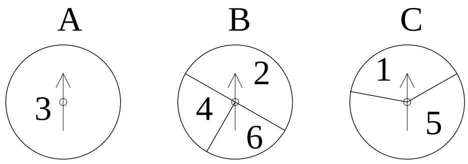

Figura 1.

Diremos que un disco es mejor que otro si tiene probabilidad mayor que $\frac{1}{2}$ de obtener un valor mayor. Notaremos como A, B y C a los valores aleatorios obtenidos al hacer girar las flechas de los discos A, B y C respectivamente.

(i) Muestre que A es mejor que B, B es mejor que C pero que C es mejor que A cuando se sabe que las probabilidades de cada disco son:

$$I\!P(A=3)=1 \qquad \begin{array}{l} I\!P(B=2)=\frac{2}{3} \\ I\!P(B=4)=\frac{1}{6} \\ I\!P(B=6)=\frac{1}{6} \end{array} \qquad \begin{array}{l} I\!P(C=1)=\frac{4}{9} \\ I\!P(C=5)=\frac{5}{9} \end{array}$$

(ii) Cómo cambia el orden anterior si $I\!P(C=1)=\frac{1}{3}$ y $I\!P(C=5)=\frac{2}{3}$?

3.- Dos personas A y B participan en un juego aleatorio, para el cual cuentan con dos dados equilibrados y una urna con n bolas negras y b bolas blancas.

El juego comienza al lanzar ambos dados para luego sacar dos bolas de la urna. Si la suma de los dados es mayor o igual a 7 o menor o igual que 3 entonces gana B si se obtiene alguna bola blanca y gana A en otro caso. Si la suma de los dados es mayor que 3 y menor que 7 entonces A gana cuando se obtienen bolas de distinto color y B gana en otro caso.

(i) Determine una relación entre n y b de modo que el juego sea justo para ambos jugadores.

(ii) Suponga que la urna tiene 2 bolas blancas y 6 bolas negras. Sabiendo que A ganó el juego, calcule la probabilidad de que la suma de los dados haya sido mayor o igual que 7.

La siguiente pregunta es optativa y reemplaza la peor pregunta de las anteriores (sólo si conviene).

4.- Un Espacio de Probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, I\!P)$ se dice *no atómico* si:

$$(\forall\, A \in \mathcal{F},\ I\!P(A) > 0) \quad \exists B \in \mathcal{F}\,, B \subseteq A \quad 0 < I\!P(B) < I\!P(A)$$

(i) En $(\Omega, \mathcal{F}, I\!P)$ un Espacio de Probabilidad cualquiera, pruebe que en cualquier partición de N elementos en $\mathcal{F}$ de Ω existe un elemento con probabilidad menor o igual que $\frac{1}{N}$.

Para lo siguiente asuma $(\Omega, \mathcal{F}, I\!P)$ no atómico.

(ii) Muestre que para todo $\{x\}$ en $\mathcal{F}$ se tiene que $I\!P(\{x\}) = 0$.

(iii) Muestre que:

$$(\forall\, \epsilon > 0\, \forall\, A \in \mathcal{F},\ I\!P(A) > 0) \quad \exists B \in \mathcal{F},\ B \subseteq A \quad 0 < I\!P(B) < \epsilon$$

Tiempo: 3 horas.

Preguntas en hojas separadas.