MA-34A Probab. y Procesos Estocásticos	**19 de Octubre, 1998**

Control No. 2

Prof. Cátedra: M. Kiwi — *Prof. Auxiliar: G. Fuenzalida*

TIEMPO: 3 HRS.

PROBLEMA 1:

(i).- Sean X e Y dos variables aleatorias independientes que se distribuyen de acuerdo a una Normal(μ, σ^2) donde $\mu = 1$ y $\sigma^2 = 4$. Utilizando la tabla que aparece en el reverso, calcular los dos dígitos más significativos de $\mathbb{P}\left(\{|X| \leq 1, Y \geq 2\}\right)$.

(ii).- Sea $\lambda > 0$. Para cada $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$, sea $N(t)$ una variable aleatoria cuya distribución es una Poisson(λt). Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea T_n una variable aleatoria absolutamente contínua que satisface:

$$T_n \leq t \quad \Longleftrightarrow \quad N(t) \geq n\,.$$

Pruebe que,

$$F_{T_n}(t) \quad = \quad 1 - e^{-\lambda t} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^m}{m!}\,,$$

y concluya que T_n es una Gama e identifique sus parámetros.

PROBLEMA 2:

(i).- Encuentre la función densidad de la variable aleatoria lognormal de parámetros (μ, σ^2), i.e. de la variable aleatoria $Y = e^Z$ donde Z es una variable aleatoria Normal(μ, σ^2).

(ii).- Se dice que el vector aleatorio (X, Y) es normal bivariado si la función densidad conjunta de X e Y es tal que $f_{X,Y}(x, y) =$

$$\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2 - 2\rho\frac{(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right]\right)\,.$$

- Pruebe que si $\rho = 0$ entonces X e Y son independientes.
- Pruebe que si $\mu_X = \mu_Y = 0$ y $\sigma_X = \sigma_Y = 1$, entonces X es una Normal$(0, 1)$.
  Indicación: Complete el cuadrado del binomio.

PROBLEMA 3:

(i).- Sean X e Y variables aleatorias independientes tales que $X, Y \sim$ Geométrica(p). Pruebe que si $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $m < n$, entonces $\mathbb{P}\left(\{X = m\} \,/\, \{X + Y = n\}\right) = 1/(n-1)$.

(ii).- Sea $a > 0$. Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes distribuidas de acuerdo a una Uniforme$(0, a)$. Sean $Y_1 = \min\{X_1, X_2\}$ e $Y_2 = \max\{X_1, X_2\}$.

- Calcule la función distribución de Y_1.
- Calcule la probabilidad que con tres segmentos de largo Y_1, $Y_2 - Y_1$, y $a - Y_2$ se pueda construir un triángulo. (Recordar que con tres segmentos de largo L_1, L_2, y L_3 se puede construir un triángulo, sí y sólo si, $L_1 \leq L_2 + L_3$, $L_2 \leq L_1 + L_3$, y $L_3 \leq L_1 + L_2$.)

  Indicación: Calcule el área de $C \subseteq [0, a] \times [0, a]$ tal que $(X_1, X_2) \in C$, sí y sólo si, con los tres segmentos de largo Y_1, $Y_2 - Y_1$, y $a - Y_2$ se puede construir un triángulo.

SIN CONSULTAS.

Tabla: Area $\Phi(x)$ a la izquieda de x bajo la curva normal standard.

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999