MA34A-02
Profesor: Pierre-Paul Romagnoli
Auxiliar: Rodrigo Dávila

CONTROL 2

1.- Dos amigos X e Y quedaron de almorzar juntos a las 12:30. Se sabe que el tiempo de llegada de ambos es una distribución uniforme entre las 12:15 y las 13:00 y que además son independientes.

El tiempo que el primero en llegar está dispuesto a esperar al segundo es t minutos.

(i) Calcule la distribución de T, definido como el tiempo que espera el primero en llegar.

(ii) Calcule la probabilidad de que se junten a almorzar.

2.- Un casino ofrece el siguiente juego. El juego consiste en lanzar una moneda hasta que salga cara y la casa paga 2^n, donde n es el número de lanzamientos. Como el jugador siempre gana dinero la casa cobra por jugar una cierta cantidad.

El juego se dirá justo si el valor esperado de ganancia del jugador es igual al valor esperado de ganancia de la casa. Se dirá injusto para cualquiera que tenga un valor esperado menor.

(i) Suponiendo que la probabilidad de obtener cara es p. Muestre que hay valores de p para los cuales el juego resulta injusto para la casa independiente de lo que cobre por jugar. Calcule, cuando sea posible, el valor que debe cobrar la casa para que el juego sea justo.

(ii) Asuma ahora que la casa tiene un capital finito, K entre 2^N y 2^{N+1} y que por lo tanto el máximo valor que pagará será K. Encuentre la cantidad que debe cobrar la casa para que el juego sea justo.

3.- El tiempo de duración de una ampolleta puede modelarse en general como una variable aleatoria T con distribución exponencial de parámetro $\lambda > 0$.

En una habitación hay una lámpara con 4 ampolletas, cada una con un tiempo esperado de duración de 12 días y que funcionan independientemente.

Se define I como la variable aleatoria que representa el tiempo que la pieza permanece iluminada, es decir, el tiempo que transcurre hasta que las 4 ampolletas se queman. Calcule $\mathbb{E}(I)$

Esta pregunta es optativa y reemplaza la peor pregunta sólo si conviene.

4.- Dadas X, Y variables aleatorias absolutamente continuas independientes con densidades f y g respectivamente. Muestre que:

(i) $$\lim_{h \to 0} \frac{\mathbb{P}(Y-h \leq X \leq Y+h)}{2h} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)\,dt$$

(ii) Si $f = g$, $\quad \mathbb{E}\left(\frac{X}{X+Y}\right) = \frac{1}{2}$

Tiempo: 3 horas.

Preguntas en hojas separadas.