MA34A Probabilidades y Procesos Estocásticos

Profesor: Pierre-Paul Romagnoli

Auxiliar: Andrés Guzmán

CONTROL 2

1.- Sea X una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[0,1]$. Dado $r \in [0, \frac{1}{2}]$ fijo, sea Y la variable aleatoria definida como el largo del intervalo que contiene a r entre $[0,X]$ y $[X,1]$.

(i) Calcule la distribución de Y, muestre que es absolutamente continua y calcule su densidad.

(ii) Calcule $\mathbb{E}(Y)$ y $V(Y)$.

2.- Una persona tiene dos cajas de fósforos con N fósforos cada una. Cuando quiere prender un cigarro selecciona una de las dos cajas y saca un fósforo.

(i) En algun momento antes de $2N$ extracciones una de las dos cajas se vacía primero. Considere la variable aleatoria X definida como el número de fósforos que hay en la caja que todavía tiene fósforos justo cuando la otra caja se vacía. Calcule la distribución de X.

(ii) Muestre que la probabilidad de que X valga uno o dos es igual y que además esto es lo mas probable. HINT: Estudie el cuociente $\frac{\mathbb{P}(X=k+1)}{\mathbb{P}(X=k)}$.

3.- (i) Sea X una variable aleatoria binomial de parámetros $n \in \mathbb{N}$ y $p \in [0,1]$. Pruebe que:

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right) = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}.$$

(ii) Sea X una variable aleatoria normal de parámetros (μ, σ^2). Encuentre la densidad de $Y = e^X$.

RECORDATORIO:

(i) Una variable uniforme en un intervalo $[a,b]$ vale 0 fuera del intervalo y una constante en el intervalo $[a,b]$.

(ii) Una binomial de parámetros (n,p) consiste en ver el número de éxitos en n lanzamientos independientes con probabilidad de éxito p.

(iii) La densidad de una normal (μ,σ^2) es $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

Tiempo: 3 horas.

Preguntas en hojas separadas.