MA-34A Probab. y Procesos Estocásticos **17 de Junio, 1996**

Control No. 3

Prof. Cátedras: F. Farias, M. Kiwi, y A. Maass
Prof. Auxiliares: D. Hojman, J.P. Risco, y P.P. Romagnoli

TIEMPO: 3.0 HRS.

La nota final de este control se calcula como el promedio de las 4 mejores preguntas.

PROBLEMA 1: Sea X una variable aleatoria. Pruebe que si $a \in I\!R$, $a > 0$, entonces

$$\mathbf{E}(X^2) \;\geq\; a^2\, I\!P\left(|X| \geq a\right) .$$

Indicación: Descomponga $X^2 = X^2\, 1\!\!\mathrm{I}_{\{X^2 \geq a^2\}} + X^2\, 1\!\!\mathrm{I}_{\{X^2 < a^2\}}$.

PROBLEMA 2: Sean X, Y variables aleatorias absolutamente continuas cuya densidad conjunta esta dada por

$$f_{X,Y}(x,y) \;=\; \frac{\sqrt{3}}{4\,\pi} \cdot e^{-(x^2+y^2+xy)/2} .$$

1. (3.0 pts.) Pruebe que X e Y no son independientes.
2. (3.0 pts.) Calcular la densidad de $U = X + Y$. Identifique sus parámetros, i.e. $\mathbf{E}(U)$ y $\mathbf{V}(U)$.

   Indicación: Calcular la distribución de U como la marginal de una transformación apropiada de X e Y.

PROBLEMA 3: Sean X, Y y ϵ variables aleatorias donde ϵ es una $Normal(0,1)$ independiente de X e Y. Se define la variable aleatoria $Z = a\,X + \epsilon$, donde $a \in I\!R$. Asuma que las varianzas de X e Y son σ_X^2 y σ_Y^2 respectivamente, y que la covarianza de X e Y es $(\rho \cdot \sigma_X \cdot \sigma_Y)$. Calcular el valor de $a \in I\!R$ que minimiza la varianza de $Z - Y$.

PROBLEMA 4: Sea X una variable aleatoria absolutamente continua de densidad

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ t & 0 < t \leq 1 \\ 2-t & 1 < t \leq 2 \\ 0 & 2 < t\,. \end{cases}$$

Sea Y una variable aleatoria $Uniforme(0,1)$ independiente de X. Calcular y graficar la función densidad de $X+Y$. Determine $\mathbf{E}(X+Y)$.

PROBLEMA 5: A lo largo de un camino de 1 kilómetros hay tres teléfonos de emergencia que fueron distribuidos al azar a lo largo de la ruta. Se quiere determinar la probabilidad de que no existan dos teléfonos a una distancia entre ellos menor que d kilómetros, donde $d \in [0,1]$.

Para ello, considere las tres variables aleaotorias independientes X, Y, Z con distribución $Uniforme(0,1)$. Denote las variables aleatorias $\min\{X,Y,Z\}$, $\text{mediana}\{X,Y,Z\}$, $\max\{X,Y,Z\}$ como $X_{(1)}, X_{(2)}, X_{(3)}$ respectivamente.

1. (1.5 pts.) Probar que para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ se tiene que
$$\mathbb{P}\left(X_{(1)} \leq x, X_{(2)} \leq y, X_{(3)} \leq z\right) = 6\,\mathbb{P}\left(X \leq x, Y \leq y, Z \leq z, X \leq Y \leq Z\right).$$
2. (2.0 pts.) Probar que si $x \leq y \leq z$, $x, y, z \in [0,1]$, entonces
$$f_{X_{(1)},X_{(2)},X_{(3)}}(x,y,z) = 6\,.$$
3. (1.0 pts.) Verifique que cuando $x, y, z \in \mathbb{R}$ y $x > y$ entonces $\mathbb{P}\left(X_{(1)} \leq x, X_{(2)} \leq y, X_{(3)} \leq z\right)$ no depende de x, luego $f_{X_{(1)},X_{(2)},X_{(3)}}(x,y,z) = 0$. Cálculos similares permiten concluir (no lo pruebe) que si no se cumple que $x \leq y \leq z$ entonces $f_{X_{(1)},X_{(2)},X_{(3)}}(x,y,z) = 0$.
4. (1.5 pts.) Calcule $\mathbb{P}\left(X_{(1)} + d \leq X_{(2)}, X_{(2)} + d \leq X_{(3)}\right)$ para determinar la probabilidad buscada.

SIN CONSULTAS.