MA34A Probabilidades y Procesos Estocásticos

Profesor: Pierre-Paul Romagnoli

Auxiliar: Andrés Guzman

CONTROL 3

1.- Sea (X, Y) un vector aleatorio uniforme en $[0, 1] \times [0, 1]$.

(i) Se definen $U = X \cdot Y$ y $V = \frac{X}{Y}$. Encuentre las distribuciones de U y V.

(ii) Calcule $\mathbb{E}(U)$, $\mathbb{E}(V)$ y $\mathbb{E}(U \cdot V)$.

(iii) Son U y V independientes ? Justifique.

2.- Sean X, Y variables aleatorias independientes ambas con distribución geométrica con parámetro $p \in [0, 1]$.

(i) Se define $U = \min\{X, Y\}$ y $V = X - Y$. Encuentre las distribuciones de U y V.

(ii) Calcule $\mathbb{E}(U)$, $\mathbb{E}(V)$ y $\mathbb{E}(U \cdot V)$.

(iii) Son U y V independientes? Justifique.

3.- (i) Sea X variable aleatoria de Poisson de parámetro λ. Se define $Y = \frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$. Calcule la generadora de momentos φ_Y.

(ii) Sea Z variable aleatoria $Normal(0, 1)$. Calcule la generadora de momentos φ_Z.

(iii) Muestre que $\lim_{\lambda \to \infty} \varphi_Y(t) = \varphi_Z(t)$ para $t \in \mathbb{R}$. En que Y es la variable aleatoria definida en (i) que depende del parámetro λ.

HINT: Estudie $\log |\varphi_Y(t)|$.

RECORDATORIO:

(i) Un vector aleatorio uniforme en una región vale 0 fuera de la región y una constante en la región.

(ii) Una variable geométrica de parámetro p consiste en ver el número de lanzamientos independientes hasta obtener el primer exito con probabilidad de éxito p.

(iii) La generadora de momentos de X es una función $\varphi_X : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en que $\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$.

(iv) Recuerde que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{\lambda}$.

(v) La densidad de una $Normal(0, 1)$ es $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$.

Tiempo: 3 horas.

Preguntas en hojas separadas.