MA34A
Profesor: Pierre-Paul Romagnoli.
Auxiliar: Rodrigo Dávila.

GUIA DE VECTORES ALEATORIOS

1.- Sean $X_1, \ldots, X_N$ variables aleatorias independientes y S variable aleatoria discreta con soporte $\{1, \ldots, N\}$ definida por $I\!P(S = n) = p_n$.

Si N es independiente con cualquier X_n muestre que:

(i) $I\!E(X_S) = \sum\limits_{n=1}^{N} p_n \cdot I\!E(X_n)$

(ii) $I\!P(X_S \in A) = \sum\limits_{n=1}^{N} p_n \cdot I\!P(X_n \in A)$

(iii) Si X_n es v.a.a.c con densidad f_n para todo n muestre que la densidad de X_S es $f_{X_S}(x) = \sum\limits_{n=1}^{N} p_n \cdot f_n(x)$.

Algunas aplicaciones:

1.1 En un banco hay N cajeros, el tiempo de atención del n-ésimo cajero sigue una distribución exponencial de parámetro λ_n y además son independientes entre sí. Una persona cualquiera en la cola común del banco tiene una probabilidad de ser atendido por el n-ésimo cajero que supondremos proporcional a λ_n.

Calcule el tiempo esperado de atención de una persona en la cola común del banco y su distribución.

1.2 Se tienen N monedas cargadas de modo que la probabilidad de cara de la n-ésima moneda es p_n, se toma una moneda al azar. Calcule el valor esperado y la distribución del resultado del lanzamiento.

2.- Sea T variable aleatoria exponencial de parámetro λ y X_T con distribución Poisson de parámetro T. Muestre que:

(i) $I\!P(X_T = n) = \frac{\lambda}{(\lambda+1)^{n+1}} \quad \forall\, n \in I\!N$

(ii) Directamente (sin usar la distribución) $I\!E(X_T) = \frac{1}{\lambda}$.

3.- Sea Θ v.a uniforme en $[0, 1]$ y S v.a uniforme en $[-\Theta, \Theta]$, muestre $I\!E(S) = 0$ y que $V(S) = \frac{1}{9}$.

4.- Sea (X, Y) vector aleatorio con densidad conjunta:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\sqrt{2}}{3\pi} e^{-\frac{x^2}{2} + \frac{xy}{3} - \frac{y^2}{2}}$$

(i) Muestre que $I\!E(X) = I\!E(Y) = 0$, $V(X) = V(Y) = \frac{9}{8}$, y que $COV(X,Y) = \frac{3}{8}$.

(ii) Sea $U = X + Y$ y $V = X - Y$ muestre que la densidad conjunta de (U,V) es:

$$f_{UV}(u,v) = \frac{\sqrt{2}}{6\pi} e^{-\frac{x^2}{6}} \cdot e^{-\frac{y^2}{3}}$$

(iii) Sea $U = aX + bY$ y $V = cX + dY$ muestre que U y V son independientes sí y sólo sí $c(b - 3d) = a(3b - d)$.

5.- Sea (X,Y) vector aleatorio uniforme sobre el triángulo formado por los puntos $a = (-1,0)$, $b = (1,0)$ y $c = (0,1)$. Muestre que X tiene distribución uniforme sobre $[1 - Y, Y - 1]$.

6.- Sean X, Y variables aleatorias independientes con densidad de Cauchy de parámetros u y v respectivamente, muestre que $X + Y$ es de Cauchy de parámetro $u + v$.

7.- Sea X uniforme en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ muestre que $\tan(X)$ tiene distribución de Cauchy con parámetro 1.

8.- Sean $X_1, \ldots, X_N$ v.a.i.i.d con distribución de Poisson de parámetro 1, se define $S_N = X_1 + \ldots + X_N$ muestre que:

$$I\!E\left(\left|\min\left\{\frac{S_N - N}{\sqrt{N}}, 0\right\}\right|\right) = \frac{N^{N+\frac{1}{2}} e^{-N}}{N!}$$

9.- Sean X, Y variables aleatorias absolutamente continuas con esperanzas finitas muestre que:

$$I\!E(Y) - I\!E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [I\!P(X < t \leq Y) - I\!P(Y < t \leq X)]\, dt$$