MA34A
Profesor: Pierre-Paul Romagnoli.
Auxiliar: Rodrigo Dávila.

GUIA DE COMBINATORIA

1 Calcular el total de configuraciones distintas que se pueden obtener, al repartir 5 anillos en 4 dedos de una mano (no se considera el pulgar), cuando los anillos son distintos y cuando no lo son.

2 Se tienen bolas rojas, blancas y negras. Calcular todas las configuraciones distintas de 5 elementos.

3 Con cuantos mástiles y cuantas banderas es posible hacer 126 mensajes, cuando las banderas no son distinguibles ?

4 Se saca una letra al azar de "assisine" y otra al azar de "assassin"'. Calcular la probabilidad de que ambas letras coincidan.

5 Se sientan 3 personas en una mesa con N asientos, calcular la probabilidad de que:

(i) Queden los 3 contiguos.

(ii) Queden sólo 2 contiguos.

(iii) No queden contiguos.

6 A un hotel de 25 habitaciones llegan 18 personas. El conserje está completamente ebrio y asigna las habitaciones al azar. Calcule la probabilidad de que, no haya problemas con las habitaciones, haya problemas en exactamente k habitaciones.

7 Se saca dos veces una bola de una urna con N bolas numeradas de 1 a N (Siempre se devuelven las bolas). Calcular la probabilidad de que el número de la primera bola sea mayor (estricto) que el de la segunda. En general si se sacan n bolas. Calcular la probabilidad de que estén ordenadas de mayor a menor (es igual a la probabilidad de que estén en algún otro orden?).

8 En un grupo de N personas hay m enfermos ($N \geq m$), en total hay n habitaciones para las N personas. Suponiendo que basta un enfermo para enfermar a todos los de la habitación, calcule la probabilidad de que queden todos enfermos.

9 Dados N elementos con m_1 elementos de tipo 1, m_2 de tipo 2,..., y m_k de tipo k con $(m_1 + \ldots + m_k) = N$. Calcular las configuraciones posibles al repartirlos en n grupos distintos.

10 Se dispone de N estaciones de control que monitorean N satélites de comunicaciones (cada satélite se comunica con una sola estación y viceversa). Por razones que se investigan los satélites "olvidan" cual es la estación que les corresponde, de manera automática cada satélite selecciona al azar una estación a la cual reportarse. Calcule la probabilidad de que queden k satélites operando, suponiendo que las estaciones no se confunden si reciben más de una comunicación y suponiendo que si se confunden (Si una estación se confunde entonces no se comunica con nadie).

NOTA: Las respuestas a los problemas se darán en un par de semanas.

Soluciones

1 El total de maneras de asignar 5 anillos en 4 dedos de una mano son $\frac{(5+4-1)!}{(4-1)!} = \frac{8!}{3!}$. Si los anillos son distintos entonces cada manera da una configuración distinta. La respuesta correcta entonces será $\frac{8!}{3!}$.

Si los anillos no se distinguen entonces hay 5! maneras que corresponden a una sola configuración distinta por lo que en este caso la respuesta correcta es $\binom{8}{3}$.

2 Todas las configuraciones diferentes de 5 bolas de 3 colores son $\binom{3+5-1}{3} = \binom{7}{3}$.

3 Si hay dos mástiles entonces dado n banderas iguales el total de configuraciones diferentes son $\binom{n+2-1}{2-1} = (n+1)$, con 125 banderas sería suficiente.

Si se tienen 3 mástiles entonces hay $\binom{n+3-1}{3-1} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$ configuraciones diferentes, hay que resolver entonces:

$$\frac{(n+2)(n+1)}{2} = 126$$

4 El suceso obtener 2 veces la misma letra se descompone como obtener 2 veces una a, 2 veces una s, 2 veces una i o 2 veces una n (No es posible obtener 2 veces una e).

Hay $1 \cdot 2$ maneras de lograr aa, $3 \cdot 4$ maneras de lograr ss, $2 \cdot 1$ maneras de lograr ii y 1 manera de lograr nn.

Esto quiere decir que la respuesta correcta es $2 + 12 + 2 + 1 = 17$.

5 El total de configuraciones distintas de 3 en N son $\binom{N}{3}$.

(i) Hay $N-2$ configuraciones con 3 asientos contiguos (son todas las posiciones para el primer asiento contiguo). Por lo que la probabilidad de que queden los 3 contiguos es:

$$\frac{(N-2)}{\binom{N}{3}} = \frac{6}{N(N-1)}$$

(ii) Si los dos asientos contiguos tocan alguna esquina entonces hay $N-3$ posiciones para el tercer asiento, si no tocan una esquina entonces hay $N-4$ posibilidades para el tercer asiento.

De las $N-1$ configuraciones de 2 asientos contiguos hay dos que tocan las esquinas por lo tanto el total de configuraciones es $2(N-3)+(N-3)(N-4) = (N-3)(N-2)$. La probabilidad será:

$$\frac{(N-2)(N-3)}{\binom{N}{3}} = \frac{6(N-3)}{N(N-1)}$$

(iii) Si no hay dos ni tres asientos contiguos entonces no hay ninguno, por lo tanto la probabilidad es:

$$1-\frac{6(N-3)}{N(N-1)}-\frac{6}{N(N-1)}=\frac{N(N-1)-6(N-2)}{N(N-1)}=\frac{(N-3)(N-4)}{N(N-1)}$$

6

7

8 Hay $\frac{(N+n-1)!}{(n-1)!}$ maneras equiprobables de asignar N personas a n habitaciones.

Para poder enfermar a todos, deben quedar en menos de m habitaciones de un máximo posible de n.

Entonces dado k en $\{1,\ldots,\min\{n,m\}\}$ (el número total de habitaciones donde quedan las N personas). Hay $\binom{n}{k}$ grupos de k habitaciones posibles y hay que colocar un enfermo en cada habitación. Hay $m!\binom{m-1}{k-1}$ maneras de asignar a los enfermos sin dejar habitaciones vacias. El resto de las $N-m$ personas deben quedar a lo más en las k habitaciones lo que se puede hacer de $\frac{(N-m+k-1)!}{(k-1)!}$.

En consecuencia, dado que las N personas quedan en k habitaciones, el total de maneras de infectarlos a todos es:

$$\binom{n}{k}\cdot m!\binom{m-1}{k-1}\cdot\frac{(N-m+k-1)!}{(k-1)!}$$

La probabilidad será entonces:

$$\frac{\sum_{k=1}^{\min\{n,m\}}\binom{n}{k}\cdot m!\binom{m-1}{k-1}\cdot\frac{(N-m+k-1)!}{(k-1)!}}{\frac{(N+n-1)!}{(n-1)!}}$$

EJEMPLO: N=4, n=3, m=2.

$$\binom{3}{1}2!\cdot\binom{1}{0}\cdot\frac{2!}{0!}+\binom{3}{2}2!\cdot\binom{1}{1}\cdot\frac{3!}{1!}=(3\cdot2\cdot2)+(3\cdot2\cdot6)=12+36=48$$

Si los enfermos son 1 y 2 entonces las configuraciones son:

$$123||,\ |123|,\ ||123$$
$$132||,\ |132|,\ ||132$$

$$213||, |213|, ||213$$
$$231||, |231|, ||231$$
$$312||, |312|, ||312$$
$$321||, |321|, ||321$$
$$13|2|, 13||2, 2|13|, 2||13, |13|2, |2|13$$
$$31|2|, 31||2, 2|31|, 2||31, |31|2, |2|31$$
$$12|3|, 12||3, 3|12|, 3||12, |12|3, |3|12$$
$$21|3|, 21||3, 3|21|, 3||21, |21|3, |3|21$$
$$23|1|, 23||1, 1|23|, 1||23, |23|1, |1|23$$
$$32|1|, 32||1, 1|32|, 1||32, |32|1, |1|32$$

9 Hay $\binom{m_1+n-1}{n-1}$ configuraciones distintas al repartir los elementos de tipo 1, $\binom{m_2+n-1}{n-1}$ configuraciones distintas al repartir los elementos de tipo 2,...,$\binom{m_k+n-1}{n-1}$ configuraciones distintas al repartir los elementos de tipo k.

En consecuencia el total de configuraciones distintas al repartirlos todos es:

$$\binom{m_1+n-1}{n-1} \cdot \ldots \cdot \binom{m_k+n-1}{n-1}$$

10