Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Pauta Control 1 – Ma34a – Probabilidades

11 de Abril de 2005

Profesor: Daniel Remenik
Profesor Auxiliar: Alexis Fuentes

P1. (a) Sea E_n el evento "n lanzamientos resultan en una cantidad par de caras" (con lo que $P_n = \mathbb{P}(E_n)$). La recurrencia se obtiene condicionando respecto al último lanzamiento:

$$\begin{aligned}
P_n = \mathbb{P}(E_n) &= \mathbb{P}(E_n|E_{n-1})\mathbb{P}(E_{n-1}) + \mathbb{P}(E_n|{E_{n-1}}^C)\mathbb{P}({E_{n-1}}^C) \\
&= \mathbb{P}(\text{“sello en el } n\text{-ésimo lanzamiento”})\mathbb{P}(E_{n-1}) + \mathbb{P}(\text{“cara en el } n\text{-ésimo lanzamiento”})\mathbb{P}({E_{n-1}}^C) \\
&= (1-p)P_{n-1} + p(1-P_{n-1}).
\end{aligned}$$

La segunda fórmula se cumple evidentemente para $n = 1$ ($P_1 = 1/2$). Supongamos que vale para n y probémosla para $n+1$:

$$\begin{aligned}
P_{n+1} &= (1-p)P_n + p(1-P_n) = p + (1-2p)P_n \\
&= p + (1-2p)\left(\frac{1+(1-2p)^n}{2}\right) = p + \frac{(1-2p)+(1-2p)^{n+1}}{2} \\
&= \frac{1+(1-2p)^{n+1}}{2}.
\end{aligned}$$

(b) El estudiante está equivocado. Él erróneamente pensó lo siguiente: "Ya que vi una mitad blanca con manchas negras, hay dos opciones. O es completamente blanca con manchas negras, lo que tiene probabilidad 3/8, o es sólo la mitad blanca con manchas negras, lo que tiene probabilidad 1/4. Luego la probabilidad de que sea completamente blanca con manchas negras es $\frac{3/8}{3/8+1/4}$, es decir, 3/5." Obviamente lo anterior es incorrecto. El cálculo correcto resulta simplemente de calcular una probabilidad condicional. Definamos los siguientes eventos (de ahora en adelante nos olvidaremos de las manchas de las vacas):

$$\begin{aligned}
BB &= \text{“la vaca es blanca”}, \\
BN &= \text{“la vaca es mitad blanca y mitad negra”}, \\
NN &= \text{“la vaca es negra”}, \\
B &= \text{“el estudiante vio una mitad blanca de la vaca”}.
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(BB|B) = \frac{\mathbb{P}(B|BB)\mathbb{P}(BB)}{\mathbb{P}(B)} &= \frac{1\cdot\frac{3}{8}}{\mathbb{P}(B|BB)\mathbb{P}(BB)+\mathbb{P}(B|BN)\mathbb{P}(BN)+\mathbb{P}(B|NN)\mathbb{P}(NN)} \\
&= \frac{\frac{3}{8}}{1\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{3}{8}} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{4}{8}} \\
&= \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

(c) Denotemos por E_i, $i = 1,\dots,8$ el evento "la pareja i se sienta junta". Entonces la probabilidad que buscamos es $1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^8 E_i\right)$. Del principio de inclusión–exclusión,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{8} E_i\right) = \sum_{i=1}^{8}\mathbb{P}(E_i) - \cdots + (-1)^{n+1}\sum_{i_1<\cdots<i_n}\mathbb{P}(E_{i_1}\cap\cdots\cap E_{i_n}) + \cdots - \mathbb{P}(E_1\cap\cdots\cap E_8). \qquad (1)$$

Para calcular $\mathbb{P}(E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_n})$ primero notamos que hay 15! maneras de sentar a 16 personas en una mesa redonda (al ser la mesa redonda, cualquier rotación no cambia la distribución de la personas, por lo que para hacer el cálculo primero fijamos a una persona y luego distribuimos al resto con respecto a ella, de donde sale el 15!). Para calcular el número de distribuciones en que n parejas quedan juntas conviene primero pensar en estas parejas como fijas y considerarlas como una sola entidad cada una. Luego, para mantener a estas parejas juntas, se deben arreglar a $16-2n+n$ entidades (las 16 personas, menos las $2n$ personas de las n parejas, más las n parejas). Evidentemente hay $(16-n-1)!$ formas de hacerlo en una mesa redonda. Además, cada pareja, una vez fija su ubicación, puede sentarse de dos maneras distintas, lo que entrega

$$\mathbb{P}(E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_n}) = \frac{2^n(15-n)!}{15!}.$$

Reemplazando en (1) y notando que en cada suma los sumandos son constantes, se obtiene que la probabilidad que buscamos es $1 - \frac{1}{15!}\sum_{n=1}^{8}(-1)^{n+1}\binom{8}{n} 2^n(15-n)!$.

P2. (a) (I) Es claro que al sacar m cupones la cantidad total de opciones es N^m. Como no se debe elegir ninguno de los k cupones en K, la cantidad de opciones es $(N-k)^m$.

(II) Gracias al principio de inclusión–exclusión, y usando la parte anterior,

$$\begin{aligned}\#\left(\bigcap_{j=1,\ldots,N} {A_{j,m}}^C\right) &= N^m - \#\left(\bigcup_{j\in K} A_{j,m}\right)\\ &= N^m - \left[\sum_{r=1}^{N}(-1)^{r+1}\binom{N}{r}(N-r)^m\right],\end{aligned}$$

de donde

$$\#\left(\bigcap_{j=1,\ldots,N} {A_{j,m}}^C\right) = \sum_{r=0}^{N}(-1)^r\binom{N}{r}(N-r)^m. \tag{2}$$

(III) Una realización del evento $V_{i,m}$ se puede entender en dos pasos: primero se eligen los i tipos de cupones distintos (lo que se puede hacer de $\binom{N}{i}$ maneras) y luego se eligen m cupones de forma que ninguno de los i cupones escogidos falten. Esto último puede hacerse de igual cantidad de maneras para cualquier subconjunto de i cupones. Luego, denotando por I a un subconjunto cualquiera de $\{1,\ldots,N\}$ de cardinalidad i, y usando el hecho de que en total hay N^m resultados posibles, la probabilidad es

$$\mathbb{P}(V_{i,m}) = \frac{1}{N^m}\binom{N}{i}\#\left(\bigcap_{j\in I} {A_{j,m}}^C\right)$$

y la fórmula resulta de reemplazar (2) con $N=i$.

(b) El evento $W_{k,m}$ equivale al hecho de que el k-ésimo tipo de cupón distinto se obtuvo en la m-ésima extracción. Esto sucede si y sólo en la extracción $(m-1)$-ésima sólo habían $k-1$ tipos de cupones distintos (i.e., el evento $V_{k-1,m-1}$) y en la siguiente extracción, la m-ésima, ya habían k tipos distintos (i.e., el evento $V_{k,m}$), pues entonces en dicha extracción se obtuvo el k-ésimo tipo.

(c)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W_{k,m}) &= \mathbb{P}(V_{k-1,m-1} \cap V_{k,m}) = \mathbb{P}(V_{k,m}|V_{k-1,m-1})\mathbb{P}(V_{k-1,m-1})\\ &= \frac{N-k+1}{N}\mathbb{P}(V_{k-1,m-1}).\end{aligned}$$

La última igualdad resulta del hecho que si $V_{k-1,m-1}$ sucedió, es decir, en la $(m-1)$-ésima extracción habían $k-1$ tipos de cupones distintos, entonces para que el evento $V_{k,m}$ suceda se tiene que obtener en la m-ésima extracción uno de los $(N-k+1)$ tipos de cupones que aún no han aparecido.

(d)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(W_{k,m}) &= \frac{N-k+1}{N}\mathbb{P}(V_{k-1,m-1}) \\
&= \frac{N-k+1}{N}\binom{N}{k-1}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{k-1}{j}\left(\frac{k-1-j}{N}\right)^{m-1} \\
&= \frac{N-k+1}{N}\frac{N!}{(k-1)!(N-k+1)!}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{k-1}{j}\left(\frac{k-1-j}{N}\right)^{m-1} \\
&= \binom{N-1}{k-1}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{k-1}{j}\left(\frac{k-1-j}{N}\right)^{m-1}
\end{aligned}
$$

P3. (a) (I)

$$E = \bigcap_{\substack{A\subseteq\{1,\ldots,n\}\\ |A|=k}} E_A.$$

(II) La probabilidad de ${E_A}^C$ es la probabilidad de que no haya ningún jugador que le haya ganado a todos los jugadores en A. Por lo tanto los partidos que nos interesan son aquellos jugados entre jugadores de A y jugadores de A^C. Como hay $(n-k)k$ de estos partidos, el total de los resultados que nos interesan es $2^{(n-k)k}$. Ahora debemos calcular cuántas combinaciones de resultados resultan en el evento ${E_A}^C$. En cada una de esas combinaciones, cada jugador de A^C perdió al menos un partido con un jugador de A. Fijemos un jugador. La única combinación de resultados no admisible para él es aquella en que gana todos sus partidos. Por lo tanto, el jugador tiene 2^k-1 resultados posibles. Como hay $n-k$ jugadores en A^C, el total de combinaciones resultantes en el evento ${E_A}^C$ es $\left(2^k-1\right)^{n-k}$, lo que implica que la probabilidad buscada es

$$\mathbb{P}({E_A}^C) = \frac{\left(2^k-1\right)^{n-k}}{2^{(n-k)k}} = \left(1-\frac{1}{2^k}\right)^{n-k}.$$

(III)

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{\substack{A\subseteq\{1,\ldots,n\}\\ |A|=k}} E_A\right).$$

Como la $\mathbb{P}(E_A)$ es constante para cada A de cardinalidad k, la probabilidad resulta de usar el principio de inclusión–exclusión:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(E) &= 1-\mathbb{P}\left(\bigcup_{\substack{A\subseteq\{1,\ldots,n\}\\ |A|=k}} {E_A}^C\right) \\
&= 1-\binom{N}{k}\left(1-\frac{1}{2^k}\right)^{n-k}.
\end{aligned}
$$

Luego $\mathbb{P}(E) > 0$ si y sólo si

$$\binom{n}{k}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right]^{n-k} < 1.$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) &= 1 - \mathbb{P}\left((A_1 \cap \cdots \cap A_n)^C\right) = 1 - \mathbb{P}({A_1}^C \cup \cdots \cup {A_n}^C) \\
&\geq 1 - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}({A_i}^C) = 1 - \sum_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{P}(A_i)) \\
&= 1 - n + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \\
&= \mathbb{P}(A_1) + \cdots + \mathbb{P}(A_n) - (n-1).
\end{aligned}
$$