MA-34A Probab. y Procesos Estocásticos **22 de Abril, 1996**

Pauta Control No. 1

Prof. Cátedras: F. Farias, M. Kiwi, y A. Maass
Prof. Auxiliares: D. Hojman, J.P. Risco, y P.P. Romagnoli

TIEMPO: 3.0 HRS.

PROBLEMA 1: Sea $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $f : \Omega \to \Omega'$ una función. En este problema definimos una estructura probabilista sobre Ω' que hereda aquella sobre Ω a través de f.

1. (2 pts.) Se define la clase de subconjuntos de Ω' siguiente:

$$\mathcal{B}' \;=\; \{A \subseteq \Omega' \,:\, f^{-1}(A) \in \mathcal{B}\}\,.$$

   Pruebe que $\mathcal{B}'$ es una σ-álgebra.

2. (2 pts.) Para cada $A \in \mathcal{B}'$ definimos $\mathbb{P}'(A) = \mathbb{P}(f^{-1}(A))$. Pruebe que $\mathbb{P}'$ es una medida de probabilidad sobre $(\Omega', \mathcal{B}')$.

3. (2 pts.) Sea $\Omega = \Omega' = [0,1)$ y $f : [0,1) \to [0,1)$ tal que $f(x) = 2x \pmod 1$. En Ω consideramos la σ-álgebra de los Borelianos y la probabilidad $\mathbb{P}$ dada por el largo de un intervalo, en particular, $\mathbb{P}([a,b]) = b - a$. Sea $\mathcal{B}'$ la σ-álgebra y $\mathbb{P}'$ la medida de probabilidad inducidas for f (i.e., definidas anteriormente). Pruebe que si I es un intervalo de $[0,1)$, entonces

$$\mathbb{P}'(I) \;=\; \mathbb{P}(I)\,.$$

SOLUCIÓN:

1. Probemos que $\mathcal{B}'$ satisface las condiciones necesarias para ser σ-álgebra.
   - Dado que f es una función $f^{-1}(\Omega') = \Omega \in \mathcal{B}$, luego $\Omega' \in \mathcal{B}'$.
   - Si $A \in \mathcal{B}'$ entonces $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}$ que es σ-álgebra, luego, $(f^{-1}(A))^c \in \mathcal{B}$. Pero, $(f^{-1}(A))^c = f^{-1}(A^c)$. Lo que implica que $A^c \in \mathcal{B}'$.

- Finalmente, consideremos la colección de sucesos $A_i \in \mathcal{B}'$, $i \in I\!N$. Luego, dado que $\mathcal{B}$ es σ-álgebra, y que $f^{-1}(A_i) \in \mathcal{B}$, se tiene que $f^{-1}(\bigcup_{i \in I\!N} A_i) = \bigcup_{i \in I\!N} f^{-1}(A_i) \in \mathcal{B}$. De donde se concluye que $\bigcup_{i \in I\!N} A_i \in \mathcal{B}'$.

Por lo tanto $\mathcal{B}'$ es σ-álgebra.

2. Probemos que $I\!P'$ satisface las condiciones necesarias para ser una medida de probabilidad sobre el espacio medible $(\Omega', \mathcal{B}')$.

- Claramente $I\!P'(\Omega') = I\!P(f^{-1}(\Omega')) = I\!P(\Omega) = 1$. Donde la primera igualdad es por definición, la segunda igualdad es consecuencia de que f es función, y la última es consecuencia de que $I\!P$ es medidad de probabilidad.
- Sean, $A, B \in \mathcal{B}'$ conjuntos disjuntos. Entonces, $I\!P'(A \bigcup B) = I\!P(f^{-1}(A \bigcup B)) = I\!P(f^{-1}(A) \bigcup f^{-1}(B))$. Pero, A, B disjuntos implica que $f^{-1}(A), f^{-1}(B)$ son disjuntos. Luego, como $I\!P$ es medida de probabilidad, se tiene que $I\!P'(A \cup B) = I\!P(f^{-1}(A)) + I\!P(f^{-1}(B)) = I\!P'(A) + I\!P'(B)$.
- Sean, $A_i \in \mathcal{B}'$, $i \in I\!N$, conjuntos disjuntos. El mismo argumento de la parte anterior muestra que $I\!P'(\bigcup_{i \in I\!N} A_i) = \sum_{i \in I\!N} I\!P'(A_i)$.

Por lo tanto, $I\!P'$ es medida de probabilidad sobre el espacio medible $(\Omega', \mathcal{B}')$.

3. Bastará verificar que para cada $a, b \in [0, 1)$ se tiene que

$$I\!P'([0,a)) = a \; , \tag{1.1}$$
$$I\!P'([0,b]) = b \; . \tag{1.2}$$

De esto se deduce que

$$I\!P'([a,1)) = 1 - I\!P'([0,a)) = 1 - a \; , \tag{1.3}$$
$$I\!P'((b,1)) = 1 - I\!P'([0,b]) = 1 - b \; . \tag{1.4}$$

Luego, si $a \leq b$,

$$\begin{aligned}
I\!P'([a,b]) &= I\!P'([0,b] \cap [a,1)) &= I\!P'([0,b]) + I\!P'([a,1)) - I\!P'([0,b] \bigcup [a,1)) \\
I\!P'([a,b)) &= I\!P'([0,b) \cap [a,1)) &= I\!P'([0,b)) + I\!P'([a,1)) - I\!P'([0,b) \bigcup [a,1)) \\
I\!P'((a,b)) &= I\!P'([0,b) \cap (a,1)) &= I\!P'([0,b)) + I\!P'((a,1)) - I\!P'([0,b) \bigcup (a,1)) \\
I\!P'((a,b]) &= I\!P'([0,b] \cap (a,1)) &= I\!P'([0,b]) + I\!P'((a,1)) - I\!P'([0,b] \bigcup (a,1)).
\end{aligned}$$

En las anteriores identidades, el primer término en las expresiones de la derecha es b (por (1.1) y (1.2)), el segundo término es $1 - a$ (por (1.3) y (1.4)), y el último término es 1. Luego todas las expresiones de la izquierda son iguales a $b-a$, como se quería demostrar.

Para probar (1.1) y (1.2), observar que $I\!\!P'([0,a)) = I\!\!P(f^{-1}([0,a))) = I\!\!P([0,\frac{a}{2})\bigcup[\frac{1}{2},\frac{1+a}{2})) = I\!\!P([0,\frac{a}{2}))+I\!\!P([\frac{1}{2},\frac{1+a}{2})) = \frac{a}{2}+(\frac{1+a}{2}-\frac{1}{2}) = a = I\!\!P([0,a))$, análogamente se concluye que $I\!\!P'([0,b]) = I\!\!P([0,b])$.

PROBLEMA 2: Se ha realizado un robo de valiosas obras de arte. Se sabe que los malechores se encuentran en una de dos posibles regiones con igual probabilidad y que se comunican diariamente con un reducidor. La policía está interfiriendo las comunicaciones en las dos regiones. Sin embargo, en caso de intercepción la policía es incapaz de determinar la región en que se originó la comunicación. En cada día, la probabilidad de que la policía intercepte la comunicación de los malechores, si están en la región 1 es $p_1 = \frac{1}{2}$, y si están en la región 2 es $p_2 = \frac{1}{4}$. El rastreo se repite cada día. Asuma que el éxito o fracaso de dicho rastreo dado que los malechores se encuentran en una región en particular, es independiente día a día.

(En lo que sigue, indique claramente el espacio muestral, σ-álgebra asociada, y los supuestos en que se basa para modelar la situación descrita.)

1. (2 pts.) Calcule la probabilidad que los malechores se encuentren en la región $i \in \{1,2\}$ si se intercepta su comunicación el primer día.
2. (2 pts.) Calcule la probabilidad de que si la primera intercepción es el n-ésimo día entonces los malechores estén en la i-ésima región. Evalue para $n = 2$ y $n = 3$. Comente.
3. (2 pts.) Para distraer a la policía los malechores deciden (cada noche) si se mueven a la otra región. Asuma que la decisión de moverse es independiente noche a noche. Si están en la región $i \in \{1,2\}$, la probabilidad de cambiarse de región es q_i, donde $q_1 = \frac{1}{2}$ y $q_2 = \frac{1}{4}$. Calcule la probabilidad de que los malechores se encuentren en la región $i \in \{1,2\}$ al comienzo del tercer día.

SOLUCIÓN: Sean $\Omega_0 = \{1,2\}$ y $\Omega_1 = \{exito, fracaso\}$. Consideremos el espacio muestral

$$\Omega \;=\; \Omega_0 \times \Omega_1^{I\!\!N^*} .$$

donde $I\!\!N^* = I\!\!N \setminus \{0\}$. Luego, decimos que el suceso elemental $\{(r,\vec{\omega})\} \subseteq \Omega$ ocurre, si los malechores estan en la región r y el resultado del rastreo en el i-ésimo día es ω_i.

Como los espacios muestrals Ω_0 son finitos, los dotamos de las σ-álgebras $\mathcal{F}_0$ y $\mathcal{F}_1$ de las partes de Ω_0 y Ω_1 respectivamente. Luego, al espacio muestral Ω, le asociamos la σ-álgebra producto $\mathcal{F}_0 \otimes (\bigotimes_{n\in\mathbb{N}^*} \mathcal{F}_1)$. Denotamos por $\mathbb{P}$ a la medida de probabilidad sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$ que satisface las condiciones descritas en el enunciado.

Sea R_i, $i \in \{1,2\}$, el evento correspondiente a la afirmación: "los malechores se encuentran en la región i". Sea I_n, $n \in \mathbb{N}^*$, el evento correspondiente a la afirmación: "el n-ésimo día se intercepta la comunicación de los malechores". Sea E_n el evento correspondiente a la afirmación: "la primera intercepción de la comunicación de los malechores ocurre el n-ésimo día", i.e., $E_n = \left(\bigcap_{j=1}^{n-1} I_j^c\right) \cap I_n$.

1. Se pide calcular $\mathbb{P}(R_i/I_1)$, $i \in \{1,2\}$. Por el Teorema de Bayes, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R_i/I_1) &= \frac{\mathbb{P}(I_1/R_i)\mathbb{P}(R_i)}{\mathbb{P}(I_1/R_1)\mathbb{P}(R_2) + \mathbb{P}(I_1/R_2)\mathbb{P}(R_2)} \\ &= \frac{\frac{p_i}{2}}{\frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2} = \frac{p_i}{p_1 + p_2} \,.\end{aligned}$$

   Luego, $\mathbb{P}(R_1/I_1) = \frac{2}{3}$ y $\mathbb{P}(R_2/I_1) = 1 - \mathbb{P}(R_1/I_1) = \frac{1}{3}$.

2. Se pide caluclar $\mathbb{P}(R_i/E_n)$, $i \in \{1,2\}$. Nuevamente, por Bayes y dado que $\mathbb{P}(R_1) = \mathbb{P}(R_2)$ se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R_i/E_n) &= \frac{\mathbb{P}(E_n/R_i)\mathbb{P}(R_i)}{\mathbb{P}(E_n/R_1)\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(E_n/R_2)\mathbb{P}(R_2)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(E_n/R_i)}{\mathbb{P}(E_n/R_1) + \mathbb{P}(E_n/R_2)} \,.\end{aligned}$$

   Pero, dado que $\{I_n : n \in \mathbb{N}^*\}$, es una familia de eventos independientes,

$$\mathbb{P}(E_n/R_i) = \left(\prod_{j=1}^{n-1} \mathbb{P}(I_j^c/R_i)\right) \cdot \mathbb{P}(I_n) \,.$$

   Luego, $\mathbb{P}(E_n/R_1) = \frac{1}{2^n}$ y $\mathbb{P}(E_n/R_2) = \frac{3^{n-1}}{4^n}$. Por lo tanto, $\mathbb{P}(R_1/E_n) = \frac{2^n}{2^n+3^{n-1}}$ y $\mathbb{P}(R_2/E_n) = 1 - \mathbb{P}(R_1/E_n) = \frac{3^{n-1}}{2^n+3^{n-1}}$.

   Evaluando para $n = 2$ y $n = 3$ vemos que $\mathbb{P}(R_1/E_2) = \frac{4}{7} > \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(R_2/E_2) = \frac{3}{7} < \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(R_1/E_3) = \frac{8}{17} < \frac{1}{2}$, y $\mathbb{P}(R_2/E_3) = \frac{9}{17} > \frac{1}{2}$. Observar que $\mathbb{P}(R_1/E_n)$ es decreciente como función de n. Luego, la policía debe concentrar sus esfuerzos de busqueda en la primera región sólo si la primera intercepción ocurre en uno de los dos primeros días.

3. Sea $R_i^{(j)}$ el evento correspondiente a la afirmación: "los malechores se encuentran en la región i al comienzo del j-ésimo día". Se pide calcular $I\!P(R_1^{(3)})$ y $I\!P(R_2^{(3)})$.

   Primero observamos que $I\!P(R_1^{(1)}) = I\!P(R_1) = \frac{1}{2}$ y $I\!P(R_2^{(1)}) = I\!P(R_2) = \frac{1}{2}$. Por la regla de las probabilidades totales,

$$I\!P(R_1^{(j)}) \;=\; (1-q_1)I\!P(R_1^{(j-1)}) + q_2 I\!P(R_2^{(j-1)}) \,,$$

   De donde se deduce que $I\!P(R_1^{(2)}) = \frac{3}{8}$ y $I\!P(R_2^{(2)}) = 1 - I\!P(R_1^{(2)}) = \frac{5}{8}$. Luego, se tiene que $I\!P(R_1^{(3)}) = \frac{11}{32}$ y $I\!P(R_2^{(3)}) = 1 - I\!P(R_1^{(3)}) = \frac{21}{32}$.

PROBLEMA 3: Un satélite de comunicaciones tiene n unidades emisoras que se ocupan de enviar informaciones codificadas a n decodificadores en tierra. El satélite esta programado para que el i-ésimo emisor envíe sus mensajes sólo al i-ésimo decodificador. Una vez lanzado el satélite se descubre que existe un desperfecto. Como consecuencia, cada emisor queda enviando todos sus mensajes a un sólo decodificador el cual fue elegido al azar entre los n posibles decodificadores.

1. (1.5 pts.) De un espacio de probabilidad que modele la situación descrita.
2. (2.0 pts.) Se sabe que si un decodificador recibe mensajes provenientes de más de un emisor entonces se bloquea. Calcule la probabilidad de que ningún decodificador se bloquee.
3. (2.5 pts.) Si el i-ésimo decodificador es el único capaz de descifrar los mensajes enviados por el i-ésimo emisor, calcule la probabilidad de que los mensajes provenientes de más de $k \in \{1,\ldots,n\}$ emisores puedan ser descifrados.

SOLUCIÓN:

1. Sea $E = \{1,\ldots,n\}$ la colección de emisores, y $D = \{1,\ldots,n\}$ la colección de decodificadores. Consideramos el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, I\!P)$, donde Ω es la colección de funciones $f : E \to D$, es decir, la colección de los posibles patrones de interconección entre emisores y decodificadores. Dado que Ω es un espacio muestral finito, elegimos $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Finalmente, puesto que todos los patrones de interconección son igualmente probables, definimos $I\!P(\{f\}) = \frac{1}{|\Omega|}$, lo que determina completamente la medida de probabilidad $I\!P$.

2. Si el patrón de interconección entre emisores y decodificadores esta dado por $f : E \to D$, entonces, ningún decodificador queda bloqueado si y solo si f es una función biyectiva (i.e., una permutación de $\{1, \ldots, n\}$). Luego, si $\beta \subseteq \Omega$ es el conjunto de funciones biyectivas de E en D, entonces, la probabilidad pedida es $|\beta|/|\Omega|$.

   Si $f \in \Omega$ entonces para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, $f(i)$ puede ser cualquiera de n valores. Luego del principio generalizado del conteo se deduce que $|\Omega| = n^n$. El número de permutaciones de $\{1, \ldots, n\}$ es $n!$, luego $|\beta| = n!$.

   Por lo tanto, la probabilidad de que ningún decodificador se bloequee es $n!/n^n$.

3. Sea $\Pi_j \subseteq \Omega$ la colección de funciones de E en D con exactamente j puntos fijos. Observar que los conjuntos Π_j son disjuntos. La probabilidad de que los mensajes provenientes de a lo más k emisores puedan ser descifrados es $|\bigcup_{j=0}^{k} \Pi_j|/|\Omega| = \frac{1}{|\Omega|}\sum_{j=0}^{k} |\Pi_j|$.

   Del punto anterior sabemos que $|\Omega| = n^n$.

   Sea $\Pi_I \subseteq \Omega$, donde $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$, la coleccón de funciones cuyos únicos puntos fijos están dados por la familia de índices I. Si $f \in \Pi_I$ entonces $f(i) = i$ si $i \in I$, y si $i \notin I$ entonces $f(i)$ puede ser cualquiera de $n-1$ valores ($f(i) \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$), luego del principio generalizado del conteo se deduce que $|\Pi_I| = (n-1)^{n-|I|}$. Por otro lado,

   $$\Pi_j = \bigcup_{I \subseteq \{1,\ldots,n\} : |I| = j} \Pi_I \, ,$$

   y como $I \neq I'$ implica que Π_I y $\Pi_{I'}$ son disjuntos, se concluye que

   $$|\Pi_j| = \binom{n}{j}(n-1)^{n-j} \, .$$

   Luego, la probabilidad de que los mensajes provenientes de más de k emisores puedan ser decodificados es

   $$1 - \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \frac{1}{n^j} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-j} \, .$$