MA34A-02
Profesor: Pierre-Paul Romagnoli
Auxiliar: Rodrigo Dávila

PAUTA CONTROL 1

1 (i) Para cada carta hay N posibilidades como hay N cartas entonces hay N^N posibilidades. $\{$**0.3 puntos**$\}$

Hay que fijar k cartas a entregar correctamente de un total de $\binom{N}{k}$ grupos posibles. $\{$**0.9 puntos**$\}$

Para cada una de estas cartas hay un sólo destino posible para las $N-k$ restantes lo único que no se puede hacer es entregarlas donde corresponde es decir hay $(N-1)$ posibilidades, por lo tanto hay $(N-1)^{N-k}$ posibilidades. $\{$**0.9 puntos**$\}$

Entonces el total de maneras de entregar exactamente k cartas correctamente es:

$$\binom{N}{k}(N-1)^{N-k} \qquad \{\textbf{0.9 puntos}\}$$

(ii) Hay $N!$ ordenes distintos para N cartas. $\{$**0.3 puntos**$\}$

Hay $1 \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot \ldots \cdot 1 = (N-1)!$ maneras de que la primera carta llegue a su destino, por lo tanto hay $N! - (N-1)!$ maneras de que la primera no llegue. $\{$**0.6 puntos**$\}$

Las maneras de que la segunda carta llegue a su destino y la primera no son $(N-1)! - (N-2)!$ (Olvidar la segunda carta y razonar como ántes). $\{$**0.6 puntos**$\}$

Por lo tanto las maneras en que la segunda y la primera no lleguen a su destino son $N! - 2(N-1)! + (N-2)!$ (Solo hay que restar) $\{$**0.6 puntos**$\}$

Razonando recursivamente se concluye que las maneras en que no llegue ninguna a su destino son:

$$N! - \binom{N}{N-1}(N-1)! + \ldots + (-1)^{N+1}1! \qquad \{\textbf{0.9 puntos}\}$$

2 Se supone que los valores obtenidos por los discos son independientes entre sí.

(i) Como A siempre toma el valor 3 para ganarle a B este debe tomar el valor 2, por lo tanto:

$$I\!P(A > B) = I\!P(B = 2) = \frac{2}{3} > \frac{1}{2} \qquad \{\textbf{0.9 puntos}\}$$

Una vez más como A toma siempre el valor 3 para que C gane debe tomar el valor 5, por lo tanto:

$$\mathbb{P}(C > A) = \mathbb{P}(C = 5) = \frac{5}{9} > \frac{1}{2} \qquad \{\mathbf{0.9\ puntos}\}$$

Para que B le gane a C hay dos posibilidades, C vale 1 o bien C vale 5 y B vale 6. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B > C) &= \mathbb{P}(C = 1) + \mathbb{P}([C = 5] \cap [B = 6]) \\
&= \mathbb{P}(C = 1) + \mathbb{P}(C = 5)\mathbb{P}(B = 6) \\
&= \frac{4}{9} + \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{6} = \frac{29}{54} > \frac{1}{2}
\end{aligned} \qquad \{\mathbf{1.2\ puntos}\}$$

(ii)

$$\mathbb{P}(A > B) = \mathbb{P}(B = 2) = \frac{2}{3} > \frac{1}{2} \qquad \{\mathbf{0.6\ puntos}\}$$

$$\mathbb{P}(C > A) = \mathbb{P}(C = 5) = \frac{2}{3} > \frac{1}{2} \qquad \{\mathbf{0.9\ puntos}\}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B > C) &= \mathbb{P}(C = 1) + \mathbb{P}([C = 5] \cap [B = 6]) \\
&= \mathbb{P}(C = 1) + \mathbb{P}(C = 5)\mathbb{P}(B = 6) \\
&= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} \\
&= \frac{8}{18} < \frac{1}{2}
\end{aligned} \qquad \{\mathbf{1.2\ puntos}\}$$

Obviamente A sigue siendo mejor que B, C sigue siendo mejor que A pero ahora C es mejor que B. $\{\mathbf{0.3\ puntos}\}$

3 Un espacio muestral adecuado sería $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2 \times \{N, B\}$ con $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

(i) Para que el juego sea justo para ambos, la probabilidad de ganar de cada uno debe ser $\frac{1}{2}$, basta imponer que uno tenga probabilidad $\frac{1}{2}$.

Si notamos como S el valor de la suma de los dados y A al suceso en que A gana y B el suceso en que B gana entonces por probabilidades totales:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A | S \geq 7,\ S \leq 3)\mathbb{P}(S \geq 7,\ S \leq 3) + \mathbb{P}(A | 3 < S < 7)\mathbb{P}(3 < S < 7)$$

$\{\mathbf{1\ puntos}\}$

El suceso $3 < S < 7$ corresponde a:

$$\{(1,3), (1,4), (1,5), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (5,1)\}$$

De un total de 36 posibilidades equiprobables, por lo tanto:

$$I\!P(3 < S < 7) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \qquad \{\textbf{0.4 puntos}\}$$

Por complemento se tendrá que $I\!P(S \geq 7,\ S \leq 3) = \frac{2}{3}$.

Dado $S \geq 7,\ S \leq 3$ A gana cuando no sale blanca, es decir 2 bolas negras, por lo tanto:

$$I\!P(A|S \geq 7,\ S \leq 3) = \frac{n(n-1)}{(n+b)(n+b-1)} \qquad \{\textbf{0.3puntos}\}$$

Dado $3 < S < 7$, A gana cuando sale una blanca y una negra o viceversa, este suceso tiene probabilidad:

$$I\!P(A|3 < S < 7) = \frac{nb}{(n+b)(n+b-1)} + \frac{bn}{(n+b)(n+b-1)} = \frac{2nb}{(n+b)(n+n-1)}$$

$\{\textbf{0.3 puntos}\}$

Al reemplazar se obtiene:

$$I\!P(A) = \frac{n(n-1)}{(n+b)(n+b-1)}\frac{2}{3} + \frac{2nb}{(n+b)(n+n-1)}\frac{1}{3}$$

Al imponer $I\!P(A) = \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}
\frac{n(n-1)}{(n+b)(n+b-1)}\frac{2}{3} + \frac{2nb}{(n+b)(n+n-1)}\frac{1}{3} &= \frac{1}{2} \\
4n(n-1) + 4nb &= 3(n+b)(n+b-1) \\
4n(n+b-1) &= 3(n+b)(n+b-1) \\
4n &= 3(n+b) \\
n &= 3b
\end{aligned}$$

La relación será $n = 3b$, (siempre que $n + b - 1 > 0$). $\{$**1 puntos**$\}$.

(ii) Utilizando la Regla de Bayes,

$$I\!P(S \geq 7|A) = \frac{I\!P(A|S \geq 7)I\!P(S \geq 7)}{I\!P(A)} \qquad \{\textbf{0.6 puntos}\}$$

Como se satisface en este caso $n = 3b$ se sabe que $I\!P(A) = \frac{1}{2}$.$\{$**0.4 puntos**$\}$.

Sabemos que hay 24 maneras de obtener suma mayor o igual que 7 o suma menor o igual que 3, como hay 3 maneras de obtener suma menor o igual que 3 ($\{(1,1),(1,2),(2,1)\}$)

entonces hay 21 maneras de obtener suma mayor o igual que 7. Como es un espacio equiprobable entonces $I\!P(S \geq 7) = \frac{21}{36}$. $\{$**0.4 puntos**$\}$

Para que A gane dado $S \geq 7$ deben salir dos bolas negras lo que tiene probabilidad $\frac{6 \cdot 5}{8 \cdot 7} = \frac{15}{28}$. $\{$**0.6 puntos**$\}$

Al reemplazar:

$$I\!P(S \geq 7|A) = \frac{\frac{15}{28} \cdot \frac{21}{36}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7} \cdot \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 9}}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{8} \qquad \{\textbf{1 puntos}\}$$