MA34A Probabilidades y Procesos Estocásticos

Profesores: Ivan Rapaport & Pierre-Paul Romagnoli

PAUTA CONTROL 1

1.- Sea $A =$"La ecografía dice varón" y $B =$"El bebe es niña". Del enunciado se tiene que $I\!P(A|B^c) = \frac{99}{100}$, $I\!P(A^c|B) = \frac{9}{10}$ y $I\!P(B) = \frac{1}{2}$.

Como la probabilidad condicional es función de probabilidad $I\!P(A^c|B^c) = \frac{1}{100}$.

Por la regla de bayes:

$$I\!P(B|A^c) = \frac{I\!P(A^c|B) \cdot I\!P(B)}{I\!P(A^c)}.$$

Por probabilidades totales:

$$I\!P(A^c) = I\!P(A^c|B) \cdot I\!P(B) + I\!P(A^c|B^c) \cdot I\!P(B^c) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{2} = \frac{91}{200}.$$

Reemplazando nos da:

$$I\!P(B|A^c) = \frac{9}{20} \cdot \frac{200}{91} = \frac{90}{91}.$$

2.- Sea $\Omega = \{0,1\}^3$ equiprobable. Dado $(w_1, w_2, w_3) \in \Omega$ entonces w_i es el color del gorro del concursante i con 0 codificando el color negro y 1 el color blanco. La probabilidad de ganar en ambos casos se calcula como caso favorables sobre casos posibles. Se pueden analizar todos los resultados de ambas estrategias en una sola tabla y ver en cuales el equipo ganó o perdió:

w_1	w_2	w_3	(i)	(ii)
0	0	0	*GANO*	*PERDIO*
0	0	1	*GANO*	*GANO*
0	1	0	*GANO*	*GANO*
0	1	1	*GANO*	*GANO*
1	0	0	*PERDIO*	*GANO*
1	0	1	*PERDIO*	*GANO*
1	1	0	*PERDIO*	*GANO*
1	1	1	*PERDIO*	*PERDIO*

Para (i) solo 4 de los 8 posibles tienen el primer gorro de color negro por lo que la probabilidad de ganar es $\frac{1}{2}$.

Para (ii) los únicos dos casos en que el equipo pierde es cuando todos los gorros son negros o todos son blancos es decir 2 de 8 por lo que la probabilidad de ganar es $\frac{3}{4}$.

3.- (i) El total de subconjuntos de N bolas de un total de $2N$ bolas es $\binom{2N}{N}$. Hay $\binom{N}{k}$ subconjuntos distintos de k bolas blancas para colocar en la primera urna y $\binom{N}{N-k}$ subconjuntos distintos de $N-k$ bolas negras para completar las N bolas en la primera urna. Por lo tanto la probabilidad pedida es:

$$\frac{\binom{N}{k}\cdot\binom{N}{N-k}}{\binom{2N}{N}}.$$

(ii) Por la indicación calculemos la probabilidad de que la bola extraida sea blanca. Dado que hay k bolas blancas en la primera urna la probabilidad de que la bola extraida sea blanca es $\frac{k}{N}$. Por probabilidades totales la parte (i) y dado que $\binom{N}{k}=\binom{N}{N-k}$ la probabilidad de que la bola extraida sea blanca es:

$$\frac{1}{\binom{2N}{N}}\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}^2\frac{k}{N}. \tag{$*$}$$

Por simetría o bien directamente la probabilidad de que la bola extraida sea negra es igual a $(*)$ por lo tanto como es el complemento se concluye que:

$$\frac{1}{\binom{2N}{N}}\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}^2\frac{k}{N}=\frac{1}{2}.$$

(ii) Directamente por la regla de Bayes se tiene que la probabilidad de que hubiese k bolas en la urna dado que salió blanca es:

$$\frac{\binom{N}{k}^2\frac{2k}{N}}{\binom{2N}{N}}.$$