MA-34A Probab. y Procesos Estocásticos **21 de Mayo, 1996**

Pauta Control No. 2

Prof. Cátedras: F. Farias, M. Kiwi, y A. Maass
Prof. Auxiliares: D. Hojman, J.P. Risco, y P.P. Romagnoli

TIEMPO: 3.0 HRS.

PROBLEMA 1:

1. (3.0 pts.) Considere una variable aleatoria X cuya función de distribución está dada por

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda t} & t \geq 0\,, \end{cases}$$

Calcular la distribución de la v.a. $F(X)$.

2. (3.0 pts.) Sea $a \in \mathbb{R}$ y

$$A \;=\; \left[\begin{array}{cc} \prod_{i=1}^{n}(Y-i)+a & a\cdot Y \\ 1 & Y \end{array} \right].$$

Calcular la probabilidad de que A sea invertible si $Y \sim$ *Geométrica(p)*. Calcule la misma probabilidad pero ahora asumiendo que Y es una v.a.a.c.

SOLUCIÓN:

1. Observemos que:

   (a) Si $t < 1/2$ entonces $\mathbb{P}(F(X) \leq t) = \mathbb{P}(X < 0) = 0$.

   (b) Si $t \in [1/2, 1)$ entonces $\mathbb{P}(F(X) \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t^*)$, donde t^* es el único elemento $t \in \mathbb{R}$ tal que $F(t^*) = t$. Luego, $\mathbb{P}(F(X) \leq t) = F(t^*) = t$.

   (c) Si $t \geq 1$, $\mathbb{P}(F(X) \leq t) = 1$.

2. La matriz A es invertible si su determinante es no nulo, i.e.

$$
\begin{aligned}
0 \neq det(A) &= \left(\prod_{i=1}^{n}(Y-i)+a\right)\cdot Y - a\cdot Y \\
&= \prod_{i=0}^{n}(Y-i)\,.
\end{aligned}
$$

Como Y es una geométrica, entonces $Y > 0$. Así, $det(A)$ es cero ssi $Y = i$ para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$, y es invertible si $Y \in \{n+1, \ldots\}$. Luego, la probabilidad pedida es

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \in \{n+1, \ldots\}) &= \sum_{i=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(Y = i) \\
&= \sum_{i=n+1}^{\infty} (1-p)^{i-1}p \\
&= (1-p)^n\,.
\end{aligned}
$$

Si Y es v.a.a.c. entonces $\mathbb{P}(Y \in \{n+1, \ldots\} = 0$. Luego, la probabilidad que A sea invertible es 1.

PROBLEMA 2: Sea $X : (\Omega, \beta, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \beta(\mathbb{R}))$ una v.a.a.c. positiva (i.e., $X \geq 0$), F su función distribución y f su función de densidad. Suponga además que $F(t) \neq 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$, y que f es continua en $\mathbb{R}_+$. Se define la 'tasa de falla' de la variable X a través de la ecuación

$$
\lambda(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)}\,,
$$

donde $t \geq 0$.

1. (1.5 pts.) Probar que $\lambda(t)$ determina la función de distribución F. Para ello pruebe que si $t \geq 0$:

$$
F(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda(s)ds\right)\,.
$$

2. En un estudio reciente se afirma que la tasa de muerte de los fumadores es el doble que la de los no fumadores. ¿Como entender ésto en términos de la probabilidad de sobrevivencia?; veremos que no significa que un fumador viva (en promedio) la mitad que un no fumador.

Si suponemos que el tiempo de vida de un no fumador es una v.a.a.c. positiva T_N y el tiempo de vida de un fumador también es una v.a.a.c. positiva T_F, donde $F_{T_N}(t) \neq 1, F_{T_F}(t) \neq 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$, y sus funciones de densidad son continuas en $\mathbb{R}_+$, entonces la comparación de dichas tasas corresponde a:

$$2\lambda_N(t) \;=\; \lambda_F(t)\,, \qquad \forall t \geq 0\,.$$

(a) (2.5 ptos.) Sean $0 \leq t_0 < t_1$. Probar que la probabilidad que un no fumador de al menos t_0 años alcance la edad de t_1 años está dada por:

$$\exp\left(-\int_{t_0}^{t_1} \lambda_N(s)ds\right)\,.$$

(b) (2.0 pts.) Suponga que $\lambda_N(t) = \frac{1}{30}$, $\forall t \geq 0$. Calcular la razón entre la probabilidad que un no fumador de al menos 50 años cumpla 60 años con respecto a la misma probabilidad para un fumador.

Solución:

1. Como $f(t)$ es continua en $t \geq 0$, se tiene que $F(t)$ es diferenciable en $t \geq 0$, y $F'(t) = f(t)$, si $t \geq 0$. Luego

$$\lambda(t) \;=\; -\frac{d}{dt}(\ln(1 - F(t)))\,, \qquad t > 0\,.$$

Integrando, sigue que para alguna constante c se tiene que

$$F(t) \;=\; 1 - e^{-c}\exp\left(-\int_{t_0}^{t} \lambda(s)ds\right)\,.$$

Por otro lado, como X es v.a. positiva, se tiene que $F(0) = 0$, luego $c = 0$. En resumen,

$$F(t) \;=\; 1 - \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \lambda(s)ds\right)\,.$$

2. (a)

$$\begin{aligned} p_N \;&=\; \mathbb{P}(T_N \geq t_1 | T_N \geq t_0) \;=\; \frac{\mathbb{P}(T_N \geq t_1, T_N \geq t_0)}{\mathbb{P}(T_N \geq t_0)} \\ &=\; \frac{\mathbb{P}(T_N \geq t_1)}{\mathbb{P}(T_N \geq t_0)} \;=\; \frac{\exp(-\int_0^{t_1} \lambda_N(s)ds)}{\exp(-\int_0^{t_0} \lambda_N(s)ds)}\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$p_N \;=\; \exp\left(-\int_{t_0}^{t_1} \lambda_N(s)ds\right)\,. \tag{2.1}$$

(b) Un argumento análogo al utilizado en la parte anterior muestra que

$$p_F = \exp\left(-\int_{t_0}^{t_1} \lambda_F(s)ds\right) .$$

Luego, $2\lambda_N(t) = \lambda_F(t)$, si $t \geq 0$, implica que $p_F = p_N^2$. Por lo tanto, la razón ρ pedida es

$$\rho = \frac{1}{p_N} .$$

Tomando $t_0 = 50$, $t_1 = 60$ y $\lambda_N(t) = \frac{1}{30}$ en (**??**), se concluye que $p_N = e^{-1/3}$. Luego, $\rho = e^{1/3}$.

PROBLEMA 3: Sea $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ y $\mathbb{P}$ la probabilidad producto, donde $\mathbb{P}(\{0\}) = \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{2}$. Se define la variable aleatoria $T : \Omega \to \mathbb{R}$ por

$$T((x_0, x_1, \ldots, x_i, \ldots)) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i}{2^{i+1}} .$$

Se quiere calcular la distribución de T que denotamos F.

1. (1.5 pts.) Calcular $\mathbb{P}\left(T \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right)$ para $k \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$.
2. (1.5 pts.) Calcular $F(\frac{k}{2^n})$ para $k \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$.
3. (3.0 pts.) Pruebe que si $t = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t_i}{2^{i+1}}$, $t_i \in \{0,1\}$, entonces

$$\lim_{N\to\infty} F\left(\sum_{i=0}^{N} \frac{t_i}{2^{i+1}}\right) = \lim_{N\to\infty} F\left(\sum_{i=0}^{N} \frac{t_i}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^{N+1}}\right) ,$$

e identifique la distribución F.

SOLUCIÓN:

1. $$\mathbb{P}\left(T \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right) = \mathbb{P}\left(\left\{x \in \Omega : T(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i}{2^{i+1}} \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right\}\right) .$$

Notemos que:

$$T(x) \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_i}{2^{i+1}} + \sum_{i=n}^{\infty} \frac{x_i}{2^{i+1}} \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2^i}{2^n} x_{n-i-1} + \sum_{i=n}^{\infty} \frac{x_i}{2^{i+1}}\,.$$

Por otro lado, $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{2^i}{2^n} x_{n-i-1} \notin \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$ a menos que $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ correspondan a los n primeros bits en la descomposición binaria de k. Además, $\sum_{i=n}^{\infty} \frac{x_i}{2^{i+1}} \leq \frac{1}{2^n}$, donde la igualdad se verifica ssi $x_i = 1$ para todo $i \geq n$. Luego, $T(x) \in [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$ ssi $\sum_{i=0}^{n-1} 2^i x_{n-i-1} = k$ y $\sum_{i=n}^{\infty} 2^{i+1} x_i < \frac{1}{2^n}$. Por lo tanto

$$I\!\!P\left(T \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right) \;=\; \frac{1}{2^n}\,.$$

2. Recordemos que $F(\frac{k}{2^n})$ es por definición igual a $I\!\!P(T \leq \frac{k}{2^n})$, luego

$$\begin{aligned} F\left(\frac{k}{2^n}\right) &= I\!\!P(T < 0) + \sum_{i=0}^{k-1} I\!\!P\left(T \in \left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right)\right) + I\!\!P\left(T = \frac{k}{2^n}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2^n} + 0 + I\!\!P\left(T = \frac{k}{2^n}\right) \\ &= \frac{k}{2^n}\,. \end{aligned}$$

Donde la última igualdad es consecuencia del hecho que la descomposición binaria de k es única, por lo que $I\!\!P(T = \frac{k}{2^n}) = 0$.

3. Sea $t = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t_i}{2^{i+1}}$, $t_i \in \{0, 1\}$ (todo $t \in [0,1]$ se puede expresar de esta manera). Como $\sum_{i=0}^{N} \frac{t_i}{2^{i+1}} = \sum_{i=0}^{N} \frac{2^i t_{N-i-1}}{2^{N+1}}$, del punto anterior sigue que

$$F\left(\sum_{i=0}^{N} \frac{t_i}{2^{i+1}}\right) \;=\; \sum_{i=0}^{N} \frac{t_i}{2^{i+1}} \to t \quad \text{cuando} \quad N \to \infty\,.$$

Por otro lado, como $\sum_{i=0}^{N} \frac{t_i}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^{N+1}} = \sum_{i=0}^{N} \frac{2^i t_{i-N-1} + 1}{2^{N+1}}$, del punto anterior sigue que

$$F\left(\sum_{i=0}^{N} \frac{t_i}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^{N+1}}\right) \;=\; \sum_{i=0}^{N} \frac{t_i}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^{N+1}} \quad \text{si} \quad \sum_{i=0}^{N} 2^i t_{i-N-1} < 2^{N+1} - 1\,.$$

Si $\sum_{i=0}^{N} 2^i t_{i-N-1} = 2^{N+1} - 1$ entonces $F\left(\sum_{i=0}^{N} \frac{t_i}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^{N+1}}\right) = F(1) = 1$. Luego, en ambos casos se tiene que $F\left(\sum_{i=0}^{N} \frac{t_i}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^{N+1}}\right) = \sum_{i=0}^{N} \frac{t_i}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^{N+1}}$ lo que converge a t cuando $N \to \infty$. Hemos concluido que si $t \in [0,1]$

$$t = \lim_{N\to\infty} F\left(\sum_{i=0}^{N} \frac{t_i}{2^{i+1}}\right) = \lim_{N\to\infty} F\left(\sum_{i=0}^{N} \frac{t_i}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^{N+1}}\right) = F(t)\,,$$

Donde la última igualdad es consecuencia del hecho que F es continua por la derecha.

Notar que si $t < 0$, $F(t) = 0$. Si $t \geq 1$, $F(t) = 1$, pues $F(1) = 1$ y F es no decreciente y está acotada superiormente por 1. Luego $T \sim \mathit{Uniforme}(0,1)$.