MA34A-04
Profesor: Pierre-Paul Romagnoli
Auxiliar: Andrés Guzman

PAUTA CONTROL 2

1 (i) Del enunciado se tiene que la variable Y como función de la variable X vale:

$$Y = \begin{cases} 1 - X & \text{si } X \leq r \\ X & \text{si } X > r \end{cases} \qquad (\mathbf{1.0})$$

Para calcular la distribución condicionando se procede de la manera siguiente. Por probabilidades totales tenemos que:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= I\!P(Y \leq y | X \leq r) I\!P(X \leq r) + I\!P(Y \leq y | X > r) I\!P(X > r), \\ &= I\!P(1 - X \leq y | X \leq r) I\!P(X \leq r) + I\!P(X \leq y | X > r) I\!P(X > r), \qquad (\mathbf{0.5}) \\ &= I\!P(1 - y \leq X \leq r) + I\!P(r < X \leq y). \end{aligned}$$

Es claro que $F_Y(y) = 1$ si $y \geq 1$. Dado que X tiene distribución uniforme entonces $I\!P(1 - y \leq X \leq r) = r + y - 1$ cuando $1 - y \leq r$ y 0 si no y $I\!P(r < X \leq y) = y - r$ cuando $y \geq r$ y 0 si no. Por lo tanto hay que separar según los valores de y.

Como $r \leq \frac{1}{2}$ entonces $1 - r \geq r$ y por lo tanto si $y \leq r$ entonces $1 - y \geq 1 - r \geq r$ y de la fórmula anterior se obtiene que $F_y(y) = 0$ cuando $y \leq r$. Si $y \geq r$ pero $y \leq 1 - r$ entonces se tiene que $1 - y \geq r$ por lo que por la fórmula anterior se tiene que $F_Y(y) = y - r$ cuando $r \leq y \leq 1 - r$. Si $y \geq r$ y $y \geq 1 - r$ entonces por la fórmula anterior se tiene que $F_Y(y) = r + y - 1 + y - r = 2y - 1$ si $1 - r \leq y \leq 1$. Por lo tanto se tendrá:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq r \\ y - r & r \leq y \leq 1 - r \\ 2y - 1 & 1 - r \leq y \leq 1 \\ 1 & y \geq 1 \end{cases} \qquad (\mathbf{0.5})$$

La función de distribución resulta ser continua por lo que la variable Y podría ser absolutamente continua. El candidato a densidad será:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq r \\ 1 & r \leq y \leq 1 - r \\ 2 & 1 - r \leq y \leq 1 \\ 0 & y \geq 1 \end{cases}$$

Al integrar la densidad se verifica que da la distribución y por lo tanto Y es absolutamente continua e y f_Y es la densidad. (**0.5**)

(ii) Se puede calcular la esperanza y la varianza sin conocer la distribución siendo Y función de X y usando la distribución de X que es uniforme en $[0,1]$. En este caso se tendrá que:

$$I\!E(Y) = \int_0^r (1-x)\,dx + \int_r^1 x\,dx = r - \frac{x^2}{2}\Big|_0^r + \frac{x^2}{2}\Big|_r^1 = r - \frac{r^2}{2} + \frac{1}{2} - \frac{r^2}{2} = \frac{1}{2} + r(1-r). \quad (\mathbf{1.0})$$

Para el cálculo de la varianza utilizamos la expresión $V(Y) = I\!E(Y^2) - I\!E(Y)^2$. Entonces:

$$I\!E(Y^2) = \int_0^r (1-x)^2\,dx + \int_r^1 x^2\,dx = \frac{(1-x)^3}{3}\Big|_r^0 + \frac{x^3}{3}\Big|_r^1 = \frac{2}{3} - \frac{r^3 + (1-r)^3}{3}. \quad (\mathbf{1.0})$$

Utilizando la densidad que se calculó en (i) se tendrá:

$$I\!E(Y) = \int_r^{1-r} y\,dy + \int_{1-r}^1 2y\,dy = \frac{y^2}{2}\Big|_r^{1-r} + y^2\Big|_{1-r}^1 = \frac{(1-r)^2}{2} - \frac{r^2}{2} + 1 - (1-r)^2 = \frac{1}{2} + r(1-r). \quad (\mathbf{1.0})$$

$$I\!E(Y^2) = \int_r^{1-r} y^2\,dy + \int_{1-r}^1 2y^2\,dy = \frac{y^3}{3}\Big|_r^{1-r} + \frac{2y^3}{3}\Big|_{1-r}^1 = \frac{2}{3} - \frac{r^3 + (1-r)^3}{3}. \quad (\mathbf{1.0})$$

Por lo tanto se tendrá que:

$$V(Y) = \frac{2}{3} - \frac{r^3 + (1-r)^3}{3} - \left(\frac{1}{2} + r(1-r)\right)^2. \quad (\mathbf{1.0})*$$

$*$ Si no se utilizó la distribución se obtiene un punto por la conclusión. Si se utiliza la distribución y esta está correcta entonces tambien se obtiene el punto final por la la conclusión, pero no se tiene este punto si la distribución de Y es incorrecta.

2 Sea Y la variable que cuenta el número de fósforos extraidos hasta que se vacía alguna de las dos cajas. Para que se vacie una de las dos cajas es necesario sacar a lo menos N fósforos y a lo mas se pueden sacar $2N-1$ fósforos. Para que Y valga $n \in \{N, \ldots, 2N-1\}$ entonces en las $N-1$ primeras extracciones se deben sacar $N-1$ fósforos de la primera caja y $N-n$ de la segunda caja y en la última extracción de la primera caja o en las $N-1$ primeras extracciones $N-n$ fósforos de la primera caja y $N-1$ de la segunda caja y en la última extracción de la segunda caja. Como la probabilidad de sacar de cualquiera de las dos cajas es $\frac{1}{2}$ entonces se tiene que

$$I\!P(Y=n) = 2\binom{n-1}{N-1}\frac{1}{2}^{N}\frac{1}{2}^{n-N} = \binom{n-1}{N-1}\frac{1}{2}^{n-1}. \qquad (\mathbf{1.5})$$

Es claro que $X = 2N - Y$ o sea el total de fósforos menos los que se sacaron hasta que se vació alguna de las cajas. Por lo tanto X toma valores en $k \in \{1, \ldots, N\}$ y se tiene que

$$I\!P(X=k) = \binom{2N-k-1}{N-1}\frac{1}{2}^{2N-k-1}. \qquad (\mathbf{1.5})$$

(ii) De la parte (i) se tiene que

$$\frac{I\!P(X=k+1)}{I\!P(X=k)} = \frac{\binom{2N-k-2}{N-1}\frac{1}{2}^{2N-k-2}}{\binom{2N-k-1}{N-1}\frac{1}{2}^{2N-k-1}} = \frac{2N-2k}{2N-k-1}. \qquad (\mathbf{1.5})$$

Si $k \in \{1, \ldots, N\}$ entonces $\frac{2N-2k}{2N-k-1} \leq 1$ y es igual a 1 solo cuando $k=1$. Esto muestra que la probabilidad es decreciente como función de k y es igual en 1 y 2 (k=1). (**1.5**)

3 (i) La variable binomial es discreta con $I\!P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ con $k \in \{0, \ldots, n\}$. Como $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{n+1-k} = 1$ entonces:

$$\begin{aligned}
I\!E\left(\frac{1}{X+1}\right) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}, \\
&= \frac{1}{(n+1)p} \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} p^{k+1} (1-p)^{n+1-(k+1)}, \\
&= \frac{1}{(n+1)p} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{n+1-k}, \\
&= \frac{1}{(n+1)p} \left(1 - \binom{n+1}{0} p^0 (1-p)^{n+1}\right), \\
&= \frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}.
\end{aligned} \qquad (\mathbf{1.5})$$

(ii) Es claro que Y solo toma valores positivos. Usando la distribución y dado que e^x es una función creciente de x para $y > 0$

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= I\!P(e^X \leq y), \\
&= I\!P(X \leq \log y), \\
&= \int_{-\infty}^{\log y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx.
\end{aligned} \qquad (\mathbf{1.0})$$

Por lo tanto al derivar a ambos lados se tiene que para $y > 0$:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y} e^{\frac{-(\log y - \mu)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (\mathbf{0.5})$$