MA34A-02
Profesor: Pierre-Paul Romagnoli
Auxiliar: Rodrigo Dávila

PAUTA CONTROL 2

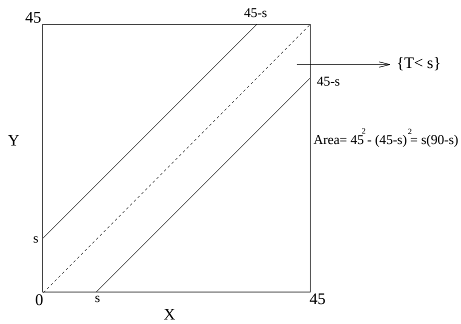
1.-

(i) Tanto la distribución de X como la de Y se pueden considerar uniformes en el intervalo $[0, 45]$ en que 0 equivale a las 12:15. Como son independientes, entonces la distribución conjunta es uniforme en $[0, 45]^2$. $\{$**0.5 puntos**$\}$

Es claro que $F_T(s) = 0$ si s es menor que 0 y que $F_T(s) = 1$ si s es mayor que t o mayor que 45. Esto porque el tiempo de espera es siempre positivo y además no sobrepasa t ni tampoco 45 $\{$**0.5 puntos**$\}$.

Ya sea gráficamente o analíticamente el suceso $T < s$ se descompone en 2 regiones. Una región donde X llega primero y otra donde Y llega primero.

Gráficamente:



Analíticamente,

Dado que X llega primero. Si llega antes de $(45 - s)$ entonces Y puede llegar entre X y $X + s$. Si llega despues de $45 - s$ entonces Y puede llegar sólo entre X y 45.

Si t es menor que 45 y $0 \leq s < t$ entonces se tiene que:

$$
\begin{aligned}
I\!P(T < s, X \leq Y) &= \int_0^{45-s} \int_x^{x+s} \frac{1}{45^2}\, dy\, dx + \int_{45-s}^{45} \int_x^{45} \frac{1}{45^2}\, dy\, dx \\
&= \frac{(45-s)s}{45^2} + \int_{45-s}^{45} \frac{(45-x)}{45^2}\, dx \\
&= \frac{(45-s)s}{45^2} + \frac{s^2}{2 \cdot 45^2} \\
&= \frac{(90-s)s}{2 \cdot 45^2}
\end{aligned}
$$

Al invertir los roles de X y de Y se obtiene el mismo resultado.

Por lo tanto se tiene que si $0 \leq s < t$:

$$I\!P(T < s) = \frac{(90-s)s}{45^2} \qquad \{\textbf{1 punto}\}$$

Si t es mayor o igual que 45 entonces T es una variable aleatoria absolutamente continua con distribución:

$$F_T(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s < 0 \\ \frac{(90-s)s}{45^2} & \text{si } 0 \leq s < 45 \\ 1 & \text{si } s \geq 45 \end{cases} \qquad \{\textbf{0.5 puntos}\}$$

Si t es menor que 45 entonces T es una variable mixta con distribución:

$$F_T(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s < 0 \\ \frac{(90-s)s}{45^2} & \text{si } 0 \leq s < t \\ 1 & \text{si } s \geq t \end{cases} \qquad \{\textbf{0.5 puntos}\}$$

(ii) La probabilidad de que se junten a almorzar es el suceso $T < t$ por lo que hay que evaluar en la distribución.

Si t es mayor que 45 entonces la probabilidad es 1 $\{$**1 punto**$\}$.

Si t es menor que 45 la probabilidad es $\frac{(90-t)t}{45^2}$ $\{$**2 puntos**$\}$.

2.- Por independencia entre lanzamientos, la probabilidad de que la primera cara salga en el lanzamiento n es $q^{n-1}p$ con $n>0$. {**2 puntos**}

(i) El jugador obtendrá $X-c$ donde c es lo que paga por jugar y X es lo que gana en el juego, y la casa obtendrá $c-X$.
El valor esperado del jugador será entonces:

$$I\!E(X-c) = \sum_{n=1}^{\infty}(2^n-c)q^{n-1}p = 2p\sum_{n=1}^{\infty}(2q)^{n-1} - c \qquad \{\mathbf{0.5\ puntos}\}$$

Si q es mayor o igual que $\frac{1}{2}$ esto vale ∞ y por lo tanto para p en $[0, \frac{1}{2}]$ el valor esperado del jugador es ∞ y el de la casa es $-\infty$. En consecuencia el juego es injusto para la casa independiente del valor de c. {**1 punto**}

Si q es estrictamente menor que $\frac{1}{2}$ entonces:

$$I\!E(X-c) = \frac{2p}{1-2q} - c$$

Al imponer $I\!E(X-c) = I\!E(c-X)$ se concluye que:

$$c = \frac{2p}{1-2q} \qquad \{\mathbf{0.7\ puntos}\}$$

(ii) Si la casa sólo dispone de capital K entonces el valor esperado del jugador será entonces:

$$\begin{aligned} I\!E(X-c) &= \sum_{n=1}^{N}(2^n-c)q^{n-1}p + \sum_{n\geq N+1}(K-c)q^{n-1}p \\ &= 2p\frac{1-(2q)^N}{1-2q} + \frac{Kpq^N}{1-q} - c \end{aligned} \qquad \{\mathbf{1\ punto}\}$$

Como anteriormente basta imponer que $I\!E(X-c) = I\!E(c-X)$ para encontrar:

$$c = 2p\frac{1-(2q)^N}{1-2q} + \frac{Kpq^N}{1-q} \qquad \{\mathbf{0.8\ puntos}\}$$

3.- Sean T_1, T_2, T_3, T_4 los tiempos de duración de las ampolletas entonces:

$$I = \max\{T_1, T_2, T_3, T_4\} \qquad \{\textbf{1 punto}\}$$

Es claro que I toma valores positivos. Como las variables son independientes e idénticamente distribuidas, se puede calcular la distribución de I como sigue:

$$\begin{aligned} F_I(x) = I\!P(I \leq x) &= I\!P(\max\{T_1, T_2, T_3, T_4\} \leq x) \\ &= I\!P(T_1 \leq x, T_2 \leq x, T_3 \leq x, T_4 \leq x) \\ &= I\!P(T_1 \leq x)^4 \\ &= (1 - e^{-\lambda x})^4 \end{aligned} \qquad \{\textbf{2 puntos}\}$$

Por lo tanto I tiene densidad:

$$f_I(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 4\lambda(1 - e^{-\lambda x})^3 e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \qquad \{\textbf{1 punto}\}$$

Se tiene que $I\!E(T_1) = 12 = \frac{1}{\lambda}$ $\{\textbf{1 punto}\}$.

$$\begin{aligned} I\!E(I) &= \int_0^\infty 4\lambda x(1 - e^{-\lambda x})^3 e^{-\lambda x}\, dx \\ &= 4\lambda \left(\int_0^\infty x e^{-\lambda x}\, dx - \int_0^\infty 3x e^{-2\lambda x}\, dx + \int_0^\infty 3x e^{-3\lambda x}\, dx - \int_0^\infty x e^{-4\lambda x}\, dx \right) \end{aligned}$$

$\{\textbf{0.5 puntos}\}$

Como $\int_0^\infty x e^{-\beta x}\, dx = (\frac{\beta x + 1}{\beta^2}) e^{-\beta x}\Big|_\infty^0 = \frac{1}{\beta^2}$ entonces:

$$\begin{aligned} I\!E(I) &= \frac{4}{\lambda}\left(1 - \frac{3}{4} + \frac{3}{9} - \frac{1}{16}\right) \\ &= \frac{25}{12\lambda} \end{aligned} \qquad \{\textbf{0.5 puntos}\}$$

Se concluye que $I\!E(I) = 25$.