MA-34A Probab. y Procesos Estocásticos	**17 de Junio, 1996**

Pauta Control No. 3

Prof. Cátedras: F. Farias, M. Kiwi, y A. Maass
Prof. Auxiliares: D. Hojman, J.P. Risco, y P.P. Romagnoli

TIEMPO: 3.0 HRS.

La nota final de este control se calcula como el promedio de las 4 mejores preguntas.

PROBLEMA 1: Sea X una variable aleatoria. Pruebe que si $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, entonces

$$\mathbf{E}(X^2) \quad \geq \quad a^2\, \mathbb{P}\left(|X| \geq a\right) .$$

Indicación: Descomponga $X^2 = X^2\, 1\!\!1_{\{X^2 \geq a^2\}} + X^2\, 1\!\!1_{\{X^2 < a^2\}}$.

SOLUCIÓN: Como $X^2 = X^2\, 1\!\!1_{\{X^2 \geq a^2\}} + X^2\, 1\!\!1_{\{X^2 < a^2\}}$, de la linealidad del operador de esperanza se concluye que

$$\mathbf{E}\left(X^2\right) \quad = \quad \mathbf{E}\left(X^2\, 1\!\!1_{\{X^2 \geq a^2\}}\right) + \mathbf{E}\left(X^2\, 1\!\!1_{\{X^2 < a^2\}}\right) .$$

Pero $X^2\, 1\!\!1_{\{X^2 < a^2\}}$ es una variable aleatoria no negativa, por lo que $\mathbf{E}\left(X^2\, 1\!\!1_{\{X^2 < a^2\}}\right) \geq 0$. Finalmente, como $X^2\, 1\!\!1_{\{X^2 \geq a^2\}} - a^2\, 1\!\!1_{\{X^2 < a^2\}}$ también es una variable aleatoria no negativa y el operador $\mathbf{E}(\cdot)$ es lineal, tenemos que $\mathbf{E}\left(X^2\, 1\!\!1_{\{X^2 \geq a^2\}}\right) \geq \mathbf{E}\left(a^2\, 1\!\!1_{\{X^2 \geq a^2\}}\right) = a^2\, \mathbb{P}\left(X^2 \geq a^2\right)$.

La primera igualdad que dedujimos, combinada con las dos desigualdades obtenidas en el parrafo anterior permiten concluir que

$$\mathbf{E}\left(X^2\right) \;\geq\; a^2\, \mathbb{P}\left(X^2 \geq a^2\right) \;=\; a^2\, \mathbb{P}\left(|X| \geq a\right) .$$

PROBLEMA 2: Sean X, Y variables aleatorias absolutamente continuas cuya densidad conjunta esta dada por

$$f_{X,Y}(x,y) \quad = \quad \frac{\sqrt{3}}{4\,\pi} \cdot e^{-(x^2+y^2+xy)/2} .$$

1. (3.0 pts.) Pruebe que X e Y no son independientes.

2. (3.0 pts.) Calcular la densidad de $U = X + Y$. Identifique sus parámetros, i.e. $\mathbf{E}(U)$ y $\mathbf{V}(U)$.

   <u>Indicación</u>: Calcular la distribución de U como la marginal de una transformación apropiada de X e Y.

SOLUCIÓN:

1. Calcularemos las marginales f_X, f_Y y verificaremos que $f_{X,Y} \neq f_X \cdot f_Y$, lo que implica que X, Y no son independientes.

   PRIMERA FORMA: Por definición de densidad marginal,

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{3}}{4\,\pi} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2+xy)}\, dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \cdot \frac{1}{2/\sqrt{3}}\, e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{2/\sqrt{3}})^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}(y+\frac{x}{2})^2}\, dy\,. \end{aligned}$$

   En la expresión anterior, la última integral es igual a 1 dado que corresponde a la integral de la función densidad de una $Normal(-\frac{x}{2}, 1)$ sobre su soporte. Luego,

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \cdot \frac{1}{2/\sqrt{3}}\, e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{2/\sqrt{3}})^2}, \qquad \forall\, x \in I\!R\,.$$

   Por simetría se tiene que

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \cdot \frac{1}{2/\sqrt{3}}\, e^{-\frac{1}{2}(\frac{y}{2/\sqrt{3}})^2}, \qquad \forall\, y \in I\!R\,.$$

   Claramente $f_{X,Y} \neq f_X \cdot f_Y$.

   SEGUNDA FORMA: Basta notar que $f_{X,Y}$ corresponde a la función densidad de una normal bivariada de media $(\mu_X, \mu_Y) = (0,0)^T$ y matriz de covarianza

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho \cdot \sigma_X \sigma_Y \\ \rho \cdot \sigma_X \sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

   Sabiendo que las coordenadas de un vector aleatorio bivariado con esperanza y matriz de covarianza como las anteriores, son normales con parámetros $\mu_X = 0$, $\sigma_X = \frac{2}{\sqrt{3}}$ y $\mu_Y = 0$, $\sigma_Y = \frac{2}{\sqrt{3}}$ se concluye que $\forall\, x, y \in I\!R$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \cdot \frac{1}{2/\sqrt{3}}\, e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{2/\sqrt{3}})^2}, \qquad f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \cdot \frac{1}{2/\sqrt{3}}\, e^{-\frac{1}{2}(\frac{y}{2/\sqrt{3}})^2}.$$

   Claramente $f_{X,Y} \neq f_X \cdot f_Y$.

2. Aplicaremos el método del Jacobiano. Sea

$$\vec{g}(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} X+Y \\ X \end{pmatrix}.$$

Obtendremos la función densidad de U como la marginal de la función densidad conjunta de U y V. Para determinar esta última densidad aplicaremos el método del Jacobiano.

Observemos que

$$J_{\vec{g}(x,y)} \;=\; Det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \;=\; -1\,.$$

Luego, $f_{U,V}(u,v) \;=$

$$f_{X,Y}(v,u-v)|J_{\vec{g}}(u,v)|^{-1} \;=\; \frac{\sqrt{3}}{4\,\pi}\,e^{-\frac{1}{2}(v^2+(u-v)^2+v(u-v))} \;=\; \frac{\sqrt{3}}{4\,\pi}\,e^{-\frac{1}{2}(v^2+u^2-u\,v)}\,.$$

La función densidad de U, i.e. f_U, la obtenemos como una de las marginales de $f_{U,V}$. En efecto, para todo $u \in I\!R$, $f_U(u) \;=$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{U,V}(u,v)\,du\,dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{3}}{4\,\pi}\,e^{-\frac{1}{2}(v^2+u^2-uv)}\,dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{3}}{4\,\pi}\,e^{-\frac{1}{2}(v^2+u^2+uv)}\,dv\,,$$

donde la última igualdad se obtiene mediante el cambio de variable $-v$ por v. Pero en la última expresión, el término de la derecha es idéntico (salvo cambio de variables) al que nos habiamos encontrado en la parte anterior de este mismo problema. Luego, de un cálculo similar se concluye que

$$f_U(u) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\cdot\frac{1}{2/\sqrt{3}}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2/\sqrt{3}}\right)^2}\,,$$

i.e., $U \sim Normal(0,\frac{2}{\sqrt{3}})$. Identificando parámetros sigue que $\mathbf{E}(U)=0$ y $\mathbf{V}(U)=\frac{4}{3}$.

Problema 3: Sean X, Y y ϵ variables aleatorias donde ϵ es una $Normal(0,1)$ independiente de X e Y. Se define la variable aleatoria $Z = a\,X+\epsilon$, donde $a \in I\!R$. Asuma que las varianzas de X e Y son σ_X^2 y σ_Y^2 respectivamente, y que la covarianza de X e Y es $(\rho\cdot\sigma_X\cdot\sigma_Y)$. Calcular el valor de $a \in I\!R$ que minimiza la varianza de $Z-Y$.

Solución: Observemos que $\mathbf{V}(Z-Y)=\mathbf{V}(Z)+\mathbf{V}(Y)-2\,\mathbf{Cov}(Z,Y)$. Pero, por independencia de X,ϵ, $\mathbf{V}(Z)=\mathbf{V}(a\,X+\epsilon)=a^2\,\mathbf{V}(X)+\mathbf{V}(\epsilon)$, i.e., $\mathbf{V}(Z)=a^2\cdot\sigma_X^2+1$. Por otro lado, dado que la covarianza es una forma bilineal, $\mathbf{Cov}(Z,Y)=\mathbf{Cov}(a\,X+\epsilon,Y)=a\,\mathbf{Cov}(X,Y)+\mathbf{Cov}(\epsilon,Y)$, y como Y,ϵ son independientes $\mathbf{Cov}(\epsilon,Y)=0$, i.e., $\mathbf{Cov}(Z,Y)=a\cdot\rho\cdot\sigma_X\cdot\sigma_Y$. Luego, como la varianza de ϵ es 1 y la de Y es σ_Y^2, concluimos que,

$$\mathbf{V}(Z-Y) \;=\; a^2\,\sigma_X^2 - 2a\cdot\rho\cdot\sigma_X\cdot\sigma_Y + 1 + \sigma_Y^2\,.$$

Derivando con respecto a la variable a, se comprueba que $\mathbf{V}(Z-Y)$ se minimiza cuando $2\,a\,\sigma_X^2 = 2\,\rho\,\sigma_X\,\sigma_Y$, i.e., cuando $a = \rho \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$.

PROBLEMA 4: Sea X una variable aleatoria absolutamente continua de densidad

$$f_X(t) \;=\; \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ t & 0 < t \le 1 \\ 2-t & 1 < t \le 2 \\ 0 & 2 < t\,. \end{cases}$$

Sea Y una variable aleatoria $Uniforme(0,1)$ independiente de X. Calcular y graficar la función densidad de $X+Y$. Determine $\mathbf{E}(X+Y)$.

SOLUCIÓN: Puesto que X, Y son independientes sabemos que la función densidad conjunta de $X+Y$, i.e. f_{X+Y}, es igual a la convolución de f_X y f_Y. Luego,

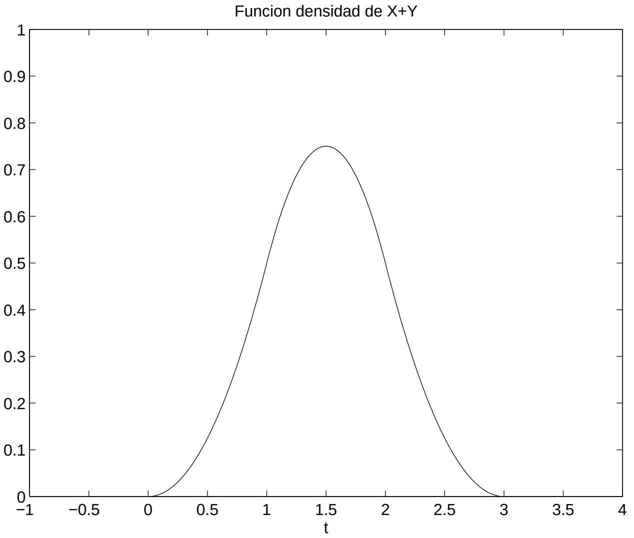
$$f_{X+Y}(t) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t-y)\,f_Y(y)\,dy \;=\; \int_{t-1}^{t} (t-y)\,f_Y(y)\,dy + \int_{t-2}^{t-1} (2-t+y)\,f_Y(y)\,dy\,.$$

Como el soporte de la variable aletoria Y es $[0,1]$, sigue que,

$$f_{X+Y}(t) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } t \le 0 \text{ o } t \ge 3 \\ \displaystyle\int_0^t (t-y)\,dy & \text{si } 0 < t \le 1 \\ \displaystyle\int_{t-1}^1 (t-y)\,dy + \int_0^{t-1} (2-t+y)\,dy & \text{si } 1 < t \le 2 \\ \displaystyle\int_{t-2}^1 (2-t+y)\,dy & \text{si } 2 < t \le 3\,. \end{cases}$$

Luego,

$$f_{X+Y}(t) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } t \le 0 \text{ o } t \ge 3 \\ \dfrac{1}{2}\,t^2 & \text{si } 0 < t \le 1 \\ -\left(t-\dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} & \text{si } 1 < t \le 2 \\ \dfrac{1}{2}\,(3-t)^2 & \text{si } 2 < t \le 3\,. \end{cases}$$



La simetía de la función f_{X+Y} en torno a $\frac{3}{2}$ permite concluir que $\mathbf{E}(X+Y) = \frac{3}{2}$.

PROBLEMA 5: A lo largo de un camino de 1 kilómetros hay tres teléfonos de emergencia que fueron distribuidos al azar a lo largo de la ruta. Se quiere determinar la probabilidad de que no existan dos teléfonos a una distancia entre ellos menor que d kilómetros, donde $d \in [0,1]$.

Para ello, considere las tres variables aleaotorias independientes X, Y, Z con distribución $Uniforme(0,1)$. Denote las variables aleatorias min$\{X,Y,Z\}$, mediana$\{X,Y,Z\}$, max$\{X,Y,Z\}$ como $X_{(1)}, X_{(2)}, X_{(3)}$ respectivamente.

1. (1.5 pts.) Probar que para todo $x, y, z \in I\!R$ se tiene que

$$I\!P\left(X_{(1)} \leq x, X_{(2)} \leq y, X_{(3)} \leq z\right) = 6\, I\!P\left(X \leq x, Y \leq y, Z \leq z, X \leq Y \leq Z\right).$$

2. (2.0 pts.) Probar que si $x \leq y \leq z$, $x, y, z \in [0,1]$, entonces

$$f_{X_{(1)},X_{(2)},X_{(3)}}(x,y,z) = 6\,.$$

3. (1.0 pts.) Verifique que cuando $x, y, z \in I\!R$ y $x > y$ entonces $I\!P\left(X_{(1)} \leq x, X_{(2)} \leq y, X_{(3)} \leq z\right)$ no depende de x, luego $f_{X_{(1)},X_{(2)},X_{(3)}}(x,y,z) = 0$. Cálculos similares permiten concluir (no lo pruebe) que si no se cumple que $x \leq y \leq z$ entonces $f_{X_{(1)},X_{(2)},X_{(3)}}(x,y,z) = 0$.

4. (1.5 pts.) Calcule $I\!P\left(X_{(1)} + d \leq X_{(2)}, X_{(2)} + d \leq X_{(3)}\right)$ para determinar la probabilidad buscada.

SOLUCIÓN: Sea $F_{X_{(1)},X_{(2)},X_{(3)}}(x,y,z) = \mathbb{P}(X_{(1)} \le x, X_{(2)} \le y, X_{(3)} \le z)$.

1. De la regla de las probabilidades totales y observando que la probabilidad que X, Y, Z no sean todas distintas es 0, se concluye que $F_{X_{(1)},X_{(2)},X_{(3)}}(x,y,z) =$

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X \le x, Y \le y, Z \le z, X \le Y \le Z) + \mathbb{P}(X \le x, Y \le z, Z \le y, X \le Z \le Y)\\ &+ \ldots\ldots + \mathbb{P}(X \le z, Y \le y, Z \le x, Z \le Y \le X)\,.\end{aligned}$$

   Por simetía se tiene que los seis terminos a la derecha de la igualdad anterior son iguales. Luego,

$$F_{X_{(1)},X_{(2)},X_{(3)}}(x,y,z) = 6\,\mathbb{P}(X \le x, Y \le y, Z \le z, X \le Y \le Z)\,.$$

2. De la parte anterior tenemos que si $x \le y \le z$, entonces

$$F_{X_{(1)},X_{(2)},X_{(3)}}(x,y,z) = 6\int_0^x \left(\int_v^y \left(\int_w^z f_{X,Y,Z}(u,v,w)\,dw\right) dv\right) du\,.$$

   Derivando parcialmente con respecto a x, y, z obtenmos que

$$f_{X_{(1)},X_{(2)},X_{(3)}}(x,y,z) = 6\,f_{X,Y,Z}(x,y,z) \qquad \text{si } x \le y \le z\,.$$

   Como X, Y, Z son variables aleatorias independientes $Uniforme(0,1)$ se tiene que $f_{X,Y,Z}(x,y,z) = f_X(x)f_Y(y)f_Z(z) = \mathbb{1}_{\{x\in[0,1]\}} \cdot \mathbb{1}_{\{y\in[0,1]\}} \cdot \mathbb{1}_{\{z\in[0,1]\}}$. Luego $f_{X_{(1)},X_{(2)},X_{(3)}}(x,y,z) = 6$, si $x \le y \le z$, $x, y, z \in [0,1]$.

3. Si $x > y$ entonces $\mathbb{P}(X \le x, Y \le y, Z \le z, X \le Y \le Z) = \mathbb{P}(Y \le y, Z \le z, X \le Y \le Z)$. Luego, por la primera parte, concluimos que

$$F_{X_{(1)},X_{(2)},X_{(3)}}(x,y,z) = 6\,\mathbb{P}(Y \le y, Z \le z, X \le Y \le Z)\,, \qquad \text{si } x > y\,.$$

   Como la expresión de la derecha en la igualdad anterior no depende de x, al derivar parcialmente con respecto a x, y, z obtenemos que $f_{X_{(1)},X_{(2)},X_{(3)}}(x,y,z) = 0$ si $x > y$.

4. De las partes anteriores y del enunciado del problema concluimos que

$$f_{X_{(1)},X_{(2)},X_{(3)}}(x,y,z) = \begin{cases} 6 & \text{si } x \le y \le z,\ x,y,z \in [0,1] \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.}\end{cases}$$

   Luego,

$$\mathbb{P}\left(X_{(1)} + d \le X_{(2)}, X_{(2)} + d \le X_{(3)}\right) = \int_0^{1-2d} \left(\int_{u+d}^{1-d} \left(\int_{v+d}^{1} 6\,dw\right) dv\right) du\,.$$

   Calculando la triple integral se concluye que la probabilidad pedida es $(1-2d)^3$.