MA-34A Probab. y Procesos Estocásticos **9 de Noviembre, 1998**

Pauta Control No. 3

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliar: G. Fuenzalida*

TIEMPO: 3.0 HRS.

PROBLEMA 1:

(i).- Sean X e Y variables aleatorias idénticamente distribuidas y de varianza finita. Pruebe que $\mathbf{Cov}(X+Y, X-Y) = 0$.

(ii).- Sean X_1, X_2, X_3 variables aleatorias independientes tales que $\mathbf{Var}(X_i) = 1$ para todo $i \in \{1,2,3\}$. Pruebe que $\rho(X_1+X_2, X_2+X_3) = 1/2$.

(iii).- Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes normalmente distribuidas de medias $\mu_1, \ldots, \mu_n$ y varianzas $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2$ respectivamente. Pruebe que $Y = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$ se distribuye como una normal de media $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i$ y varianza $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \sigma_i^2$.

Indicación: Puede utilizar que la función generadora de momentos de una normal de media μ y varianza σ^2 es $e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}$.

(iv).- Sea X una variable aleatoria tal que para todo $a \in \mathbb{R}$ se tiene que $\phi(a) = \mathbf{E}((X-a)^2) \in \mathbb{R}$. Probar que $\phi(\cdot)$ se minimiza cuando $a = \mathbf{E}(X)$.

(v).- Sea X una variable aleatoria exponencial de parámetro λ, es decir, $f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ si $t \geq 0$, y 0 en caso contrario. Para todo $a \in \mathbb{R}$ se define $\phi(a) = \mathbf{E}(|X-a|)$. Probar que $\phi(\cdot)$ se minimiza cuando $a = \lambda^{-1} \ln 2$.

SOLUCIÓN:

(i).- Observe que

$$\mathbf{Cov}(X+Y, X-Y) = \mathbf{Cov}(X,X) - \mathbf{Cov}(X,Y) + \mathbf{Cov}(Y,X) - \mathbf{Cov}(Y,Y) = \mathbf{Var}(X) - \mathbf{Var}(Y),$$

donde la primera igualdad se tiene porque la covarianza es una forma bilineal, y la última por propiedad de la covarianza. Pero X e Y se distribuyen de la misma forma luego sus varianzas son iguales y al ser finitas su resta es 0. Por lo tanto, $\mathbf{Cov}(X+Y, X-Y) = 0$.

(ii).- Por definición de correlación

$$\rho(X_1+X_2, X_2+X_3) = \frac{\mathbf{Cov}(X_1+X_2, X_2+X_3)}{\sigma_{X_1+X_2}\sigma_{X_2+X_3}}.$$

Por otro lado, como X_1 y X_2 son independientes y por enunciado, $\mathbf{Var}(X_1+X_2) = \mathbf{Var}(X_1) + \mathbf{Var}(X_2) = 2$. Luego $\sigma_{X_1+X_2} = \sqrt{2}$. Análogamente $\sigma_{X_2+X_3} = \sqrt{2}$. Además,

$$\begin{aligned} \mathbf{Cov}(X_1+X_2, X_2+X_3) &= \mathbf{Cov}(X_1,X_2) + \mathbf{Cov}(X_1,X_3) + \mathbf{Cov}(X_2,X_2) + \mathbf{Cov}(X_2,X_3) \\ &= \mathbf{Cov}(X_2,X_2) \\ &= 1, \end{aligned}$$

donde la primera igualdad se tiene porque la covarianza es una forma bilineal, la segunda puesto que la covarianza de variables aleatorias independientes es 0, y la última dado que $\mathbf{Cov}(X_2, X_2) = \mathbf{Var}(X_2)$ y por enunciado.

Todo lo anterior permite concluir que $\rho(X_1 + X_2, X_2 + X_3) = 1/2$.

(iii).- De la indicación sabemos que $\phi_{X_i}(t) = e^{\mu_i t + \sigma_i^2 t^2/2}$. Por propiedades de la función generatriz de momentos, tenemos que $\phi_{aX+b}(t) = e^{bt}\phi_X(at)$, luego

$$\phi_{\alpha_i X_i}(t) \;=\; \phi_{X_i}(\alpha_i t) \;=\; e^{\alpha_i \mu_i t + \alpha_i^2 \sigma_i^2 t^2/2}\,.$$

Además, como $X_1, \ldots, X_n$ son independientes, se tiene que $\alpha_1 X_1, \ldots, \alpha_n X_n$ son independientes. Luego, por propiedad de la función generatriz de momentos, sigue que

$$\phi_Y(t) \;=\; \phi_{\alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_n X_n}(t) \;=\; \prod_{i=1}^{n} \phi_{\alpha_i X_i}(t) \;=\; \exp\left(t \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i + t^2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \sigma_i^2/2\right)\,.$$

Notar que $\phi_Y(\cdot)$ corresponde a la función generadora de momentos de una normal de media $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i$ y varianza $\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$. Como la función generadora de momentos determina completamente la función distribución, se concluye que

$$Y \sim \text{Normal}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \sigma_i^2\right)\,.$$

(iv).- Observar que

$$\phi(a) \;=\; \mathbf{E}((X-a)^2) \;=\; \mathbf{E}(X^2 - 2aX + a^2) \;=\; \mathbf{E}(X^2) - 2a\mathbf{E}(X) + a^2\,.$$

Es decir, $\phi(\cdot)$ es una parábola con concavidad positiva. Luego, el mínimo de $\phi(\cdot)$ es aquel punto donde su derivada se anula, i.e. $a = \mathbf{E}(X)$.

(v).- En este caso,

$$\phi(a) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} |t-a| f_X(t)dt \;=\; \int_{-\infty}^{a} (t-a) f_X(t)dt + \int_{a}^{\infty} (a-t) f_X(t)dt\,.$$

Derivando, obtenemos que

$$\phi'(a) \;=\; \frac{d\phi}{da}(a) \;=\; \int_{-\infty}^{a} -f_X(t)dt + \int_{a}^{\infty} f_X(t)dt \;=\; -F_X(a) + (1 - F_X(a)) \;=\; 1 - 2F_X(a)\,.$$

Resolviendo $\phi'(a) = 0$ concluimos que el único punto crítico de $\phi(\cdot)$ es $a^* \in \mathbb{R}$ tal que $F_X(a^*) = 1/2$, i.e. $1 - e^{-\lambda a^*} = 1/2$, o equivalentemente $a^* = \lambda^{-1} \ln 2$. Como además $\phi''(a^*) = 2f_X(a^*) \geq 0$, sigue que $\phi(a)$ se minimiza cuando $a = \lambda^{-1} \ln 2$.

PROBLEMA 2:

Sean X e Y variables aleatorias independientes tales que X es una exponencial de parámetro λ e Y es una uniforme en el intervalo $]-\pi, \pi]$. Sean $U = \sqrt{X} \cos Y$ y $V = \sqrt{X} sen\, Y$.

(i).- (2.5 pts.) Use el método del Jacobiano para calcular la función densidad conjunta de U y V. Concluya que U y V son independientes y sus distribuciones son normales de media 0 y varianza $1/2\lambda$.

(ii).- (1.0 pts.) Pruebe que la función densidad de U^2 y V^2 es

$$f(t) \;=\; \begin{cases} \sqrt{\frac{\lambda}{\pi t}}e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

(iii).- (2.5 pts.) Observe que $U^2 + V^2 = X$. Luego, $U^2 + V^2$ se distribuye como una exponencial de parámetro λ. Basándose en (ii) de una demostración alternativa de este mismo hecho.

<u>Indicación</u>: $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-y)y}}dy = \pi.$

SOLUCIÓN:

(i).- Usaremos el método del Jacobiano. Primero necesitamos determinar $f_{X,Y}(\cdot,\cdot)$. Como X e Y son independientes,

$$f_{X,Y}(x,y) \;=\; f_X(x)f_Y(y) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\lambda e^{\lambda x} & \text{si } x > 0 \text{ e } y \in]-\pi,\pi]\,, \\ 0 & \text{en caso contrario}. \end{cases}$$

Sea entonces $g{:}\mathbb{R}\setminus\{0\}\times]-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ tal que $g(x,y) = (\sqrt{x}\cos y, \sqrt{x}sen\, y)$. Notar que

i. Para todo $(u,v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ el sistema

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{x}\cos y \\ v &= \sqrt{x}sen\, y \end{aligned}$$

tiene solución única dada por $x = u^2 + v^2$, $y = \arctan(v/u)$.

ii. Notar que para todo $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $y \in]-\pi,\pi]$ se tiene que

$$J_g(x,y) \;=\; \det\begin{pmatrix} \cos y/2\sqrt{x} & sen\, y/2\sqrt{x} \\ -\sqrt{x}sen\, y & \sqrt{x}\cos y \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{2}cos^2 y + \frac{1}{2}sen^2 y \;=\; \frac{1}{2} \;\neq\; 0\,.$$

Luego,

$$f_{U,V}(u,v) \;=\; f_{X,Y}(x,y)|J_g(x,y)|^{-1}\big|_{x=u^2+v^2, y=\arctan(v/u)} \;=\; \lambda\frac{1}{2\pi}e^{-\lambda(u^2+v^2)}\cdot 2 \;=\; \lambda\frac{1}{\pi}e^{-\lambda(u^2+v^2)}\,.$$

Equivalentemente,

$$f_{U,V}(u,v) \;=\; \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2\lambda}}}\,e^{-\frac{1}{2(1/2\lambda)}u^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2\lambda}}}\,e^{-\frac{1}{2(1/2\lambda)}v^2}\right)\,.$$

Como ambos términos entre paréntesis corresponden a funciones densidad (de normales de media 0 y varianza $(1/2\lambda)$), sigue que al integrar con respecto a $u \in \mathbb{R}$ y $v \in \mathbb{R}$ respectivamente, se obtiene que las funciones densidad marginal de U y V son

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2\lambda}}} e^{-\frac{1}{2(1/2\lambda)}u^2}, \\ f_V(v) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2\lambda}}} e^{-\frac{1}{2(1/2\lambda)}v^2}. \end{aligned}$$

Es decir, U y V son normales de media 0 y varianza $(1/2\lambda)$. Como $f_{U,V}(u,v) = f_U(u)f_V(v)$, para todo $u, v \in \mathbb{R}$, sigue que U y V son variables aleatorias independientes.

(ii).- Para determinar las funciones densidad de U^2 y V^2 primero calculamos sus funciones distribución. Si $t > 0$, sigue que

$$F_{U^2}(t) = \mathbb{P}\left(U^2 \leq t\right) = F_U(\sqrt{t}) - F_U(-\sqrt{t}),$$

donde la primera igualdad es por definición de función distribución. Derivando y evaluando obtenemos que

$$f_{U^2}(t) = \frac{dF_{U^2}}{dt}(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}(f_U(\sqrt{t}) - f_U(-\sqrt{t})) = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi t}}e^{-\lambda t}.$$

Por otro lado, como U^2 sólo toma valores no–negativos, se tiene que $f_{U^2}(t) = 0$ si $t < 0$.

Análogamente, $f_{V^2}(t) = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi t}}\, e^{-\lambda t}$ si $t \geq 0$, y 0 en caso contrario.

(iii).- Como U y V son independientes, U^2 y V^2 también lo son. Luego, por fórmula vista, si $t > 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} f_{U^2+V^2}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{U^2}(t-x) f_{V^2}(x)dx \\ &= \int_0^t \frac{\lambda}{\pi} \frac{1}{\sqrt{(t-x)x}} e^{-\lambda(t-x)} e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{\lambda}{\pi} e^{-\lambda t} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{(t-x)x}} dx \\ &= \frac{\lambda}{\pi} e^{-\lambda t} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-y)y}} dy, \end{aligned}$$

donde la primera igualdad se debe a que el soporte de U^2 y V^2 son los números reales no–negativos. Luego, por la indicación y puesto que U^2+V^2 no toma valores negativos, se concluye que $f_{U^2+V^2}(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ si $t \geq 0$, y 0 en caso contrario.