MA34A-04
Profesor: Pierre-Paul Romagnoli
Auxiliar: Andrés Guzman

PAUTA CONTROL 3

1 Si (X, Y) es uniforme en $[0,1] \times [0,1]$ la densidad conjunta de (X,Y) vale entonces:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 1 & 0 \le (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \\ 0 & (x,y) \notin [0,1] \times [0,1] \end{cases}$$

Por el método del Jacobiano:

Sea $\varphi : [0,1] \times (0,1] \to D$ definida por $\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} x \cdot y \\ \frac{y}{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. En que se elimina el intervalo $[0,1] \times \{0\}$ dado que tiene probabilidad 0 de ocurrir.

Se tiene que $J\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ \frac{1}{y} & \frac{-x}{y^2} \end{pmatrix}$ por lo que $|detJ\varphi(x(u,v), y(u,v)| = 2\frac{x}{y}$. Que es distinto de 0 para $(x,y) \in [0,1] \times (0,1]$ por lo que φ es invertible.

Es claro que $x(u,v) = \sqrt{u \cdot v}$ y que $y(u,v) = \sqrt{\frac{u}{v}}$. Solo resta calcular el dominio $D = \varphi([0,1] \times [0,1])$.

$$\begin{aligned} D &= \left\{ (u,v) \in [0,1] \times [0,\infty] \Big/ 0 \le \sqrt{u \cdot v} \le 1, 0 \le \sqrt{\frac{u}{v}} \le 1 \right\}, \\ &= \left\{ (u,v) \in [0,1] \times [0,\infty] \Big/ 0 \le u \cdot v \le 1, 0 < \frac{u}{v} \le 1 \right\} \end{aligned}.$$

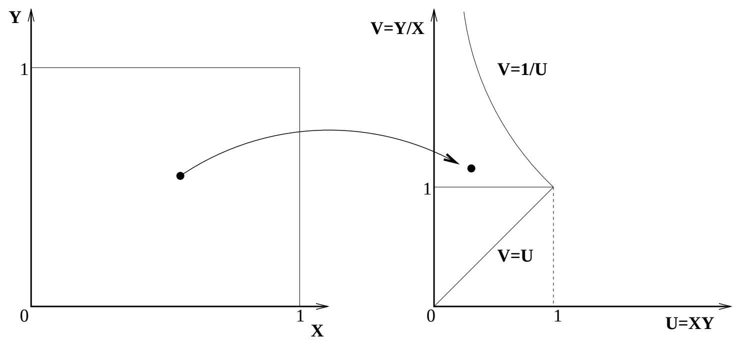

FIGURA 1: DOMINIO DEL CAMBIO DE VARIABLES

Entonces por el teorema de cambio de variables (método del Jacobiano) se sabe que:

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)}(x(u,v), y(u,v)) \cdot \frac{1}{|detJ\varphi(x(u,v), y(u,v)|}.$$

Es decir:

$$f_{(U,V)}(u,v) = \begin{cases} \frac{1}{2v} & (u,v) \in D \\ 0 & (u,v) \notin D \end{cases}$$

Para el cálculo de las marginales vemos que

$$\begin{aligned} D &= \left\{ (u,v) \in I\!\!R \times I\!\!R \Big/ 0 \leq u \leq 1, u \leq v \leq \frac{1}{u} \right\}, \\ &= \left\{ (u,v) \in I\!\!R \times I\!\!R \Big/ 0 \leq v \leq \infty, 0 < u \leq \min\left\{ v, \frac{1}{v} \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Dado $u \notin [0,1]$ se tendrá entonces que $f_U(u) = 0$ y si $u \in [0,1]$

$$f_U(u) = \int_u^{\frac{1}{u}} \frac{1}{2v} dv = \frac{1}{2}(\ln\left(\frac{1}{u}\right) - \ln(u)) = -\ln(u).$$

Es decir:

$$f_U(u) = \begin{cases} -\ln(u) & 0 < u \leq 1 \\ 0 & u \notin [0,1] \end{cases}$$

Dado $v \notin [0,\infty)$ se tendrá entonces que $f_V(v) = 0$ y si $v \in [0,\infty)$

$$f_V(v) = \int_0^{\min\{v,\frac{1}{v}\}} \frac{1}{2v} du = \frac{\min\left\{v, \frac{1}{v}\right\}}{2v}.$$

Es decir:

$$f_V(v) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 < v \leq 1 \\ \frac{1}{2v^2} & 1 < v < \infty \\ 0 & v \leq 0 \end{cases}$$

No es necesario calcular la conjunta para obtener las distribuciones marginales por lo que se podía hacer directamente es decir:

Para la distribución de U dado $u \in [0,1]$

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \frac{d}{du} I\!\!P(U \leq u) = \frac{d}{du} I\!\!P(X \cdot Y \leq u), \\ &= \frac{d}{du} \left(\int_0^u \int_0^1 dy dx + \int_u^1 \int_0^{\frac{u}{x}} dy dx \right), \\ &= \frac{d}{du}(u - u\ln(u)) = -\ln(u). \end{aligned}$$

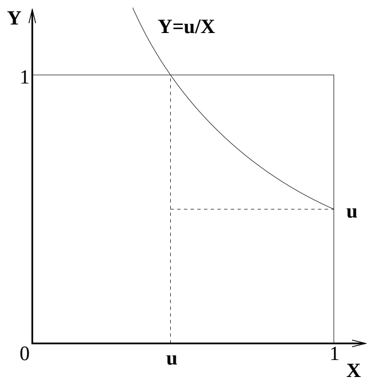

FIGURA 2: DOMINIO DE XY<u.

Para la distribución de V hay que considerar dos casos. Si $v \in [0,1)$

$$
\begin{aligned}
f_V(v) &= \frac{d}{dv} I\!P(V \leq v) = \frac{d}{dv} I\!P(\frac{Y}{X} \leq v), \\
&= \frac{d}{dv}\left(\int_0^1 \int_0^{v\cdot x} dydx\right) = \frac{d}{dv}\left(\frac{v}{2}\right) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Si $v \in [1,\infty)$

$$
f_V(v) = \frac{d}{dv} I\!P(V \leq v) = \frac{d}{dv} I\!P(\frac{Y}{X} \leq v) = \frac{d}{dv}\left(\int_0^{\frac{1}{v}} \int_0^{v\cdot x} dydx + \int_{\frac{1}{v}}^1 \int_0^1 dydx\right),
$$

$$
= \frac{d}{dv}\left(\frac{1}{2v} + \left(1 - \frac{1}{v}\right)\right) = \frac{1}{2v^2}.
$$

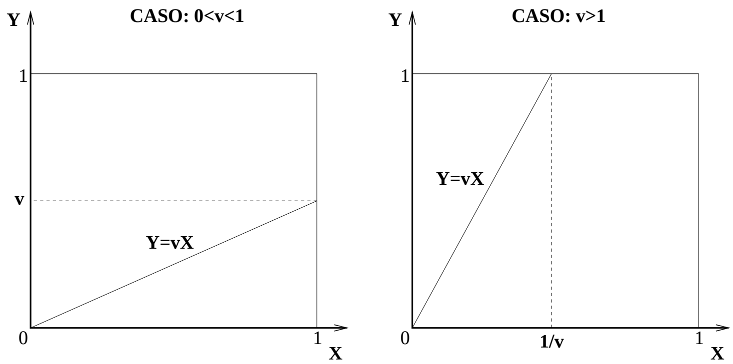

FIGURA 3: DOMINIO DE Y/X<v.

(ii) La manera fácil:

Dado que X e Y son independientes idénticamente distribuidas uniformes en $[0,1]$ se tiene que $I\!E(X) = I\!E(Y) = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$ y $I\!E(X^2) = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$. Se tendrá que:

$$\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{4},\ \mathbb{E}(U \cdot V) = \mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{3}.$$

$$\mathbb{E}(\frac{X}{Y}) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x}{y}\, dxdy = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dy}{y} = \frac{1}{2} ln(|y|)\Big|_0^1 = +\infty.$$

Usando las distribuciones obtenidas en (i).

$$\mathbb{E}(U) = \int_0^1 -u \cdot ln(u) du = \frac{u^2}{4}(1 - 2\ln(u))\Big|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

$$\mathbb{E}(V) = \int_0^1 \frac{v}{2}\, dv + \int_1^\infty \frac{v}{2v^2}\, dv = \infty.$$

$$\mathbb{E}(U \cdot V) = \int_0^1 \int_u^{\frac{1}{u}} \frac{u \cdot v}{2v}\, dvdu = \int_0^1 \frac{u}{2}\left(\frac{1}{u} - u\right) du,$$

$$= \int_0^1 \frac{1 - u^2}{2} du = \frac{3u - u^3}{6}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

(iii) Básicamente hay dos maneras:

Argumento 1: Dado que U y V independientes implica que $\mathbb{E}(U \cdot V) = \mathbb{E}(U) \cdot \mathbb{E}(V)$ y por (ii) eso no se tiene entonces no son independientes.

Argumento 2: Como no se tiene que $f_{U,V}(u, v) = f_U(u) \cdot f_V(v)$ para todos los valores de u y v (se puede dar alguno de ejemplo pero no es necesario) entonces no son independientes.

2 La variable aleatoria geométrica de parámetro p toma valores en $\mathbb{N}\setminus\{0\}$ y se tiene que $\mathbb{P}(X=n)=(1-p)^{n-1}\cdot p$. Es claro que la variable U toma valores en $\mathbb{N}\setminus\{0\}$ y la variable V toma valores en $\mathbb{Z}$. Es decir U y V son discretas.

Sea $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ y $m\in\mathbb{N}$.

Si $X=Y+m$ entonces $\min\{X,Y\}=Y$ y si $X=Y-m$ entonces se tendrá que $\min\{X,Y\}=X$. Sabiendo que X e Y son independientes se tendrá que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U=n,V=m) &= \mathbb{P}(\min\{X,Y\}=n, X-Y=m)=\mathbb{P}(Y=n,X-Y=m),\\
&= \mathbb{P}(X=m+Y,Y=n)=\mathbb{P}(X=m+Y|Y=n)\cdot\mathbb{P}(Y=n),\\
&= \mathbb{P}(X=n+m)\cdot\mathbb{P}(Y=n),\\
&= (1-p)^{n+m-1}p\cdot(1-p)^{n-1}p=(1-p)^{2n+m-2}p^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U=n,V=-m) &= \mathbb{P}(\min\{X,Y\}=n, X-Y=-m)=\mathbb{P}(X=n,X-Y=-m),\\
&= \mathbb{P}(X=n,Y=X+m)=\mathbb{P}(Y=X+m|X=n)\cdot\mathbb{P}(X=n),\\
&= \mathbb{P}(Y=n+m)\cdot\mathbb{P}(X=n),\\
&= (1-p)^{2n+m-2}p^2.
\end{aligned}$$

Sabiendo que para cualquier $0<r<1$ se tiene que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n=\frac{r}{1-r}$ y por lo tanto $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nr^n=\frac{r}{(1-r)^2}$ se tendrá que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(V=-m)=\mathbb{P}(V=m) &= \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(U=n,V=m),\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^{2n+m-2}p^2=(1-p)^{m-2}p^2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^{2n},\\
&= (1-p)^{m-2}p^2\cdot\frac{(1-p)^2}{1-(1-p)^2}=\frac{(1-p)^m p}{2-p}.
\end{aligned}$$

En que la simetría de V en torno a 0 se obtiene directamente al mirar la conjunta. Del mismo modo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U=n) &= \sum_{m=1}^{\infty}\left(\mathbb{P}(U=n,V=m)+\mathbb{P}(U=n,V=-m)\right)+\mathbb{P}(U=n,V=0),\\
&= \sum_{m=1}^{\infty}2(1-p)^{2n+m-2}p^2+(1-p)^{2n-2}p^2,\\
&= (1-p)^{2n-2}p^2\left(1+2\sum_{m=1}^{\infty}(1-p)^m\right)=(1-p)^{2n-2}p(2-p).
\end{aligned}$$

(ii) Sin usar la distribuciones. Dado que las variables X e Y son independientes se tendrá que:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(U) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \min\{n,m\}\cdot \mathbb{P}(X=n)\cdot \mathbb{P}(Y=m),\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \min\{n,m\}\cdot (1-p)^{n+m-2}p^2,\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} m\cdot (1-p)^{n+m-2}p^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=n+1}^{\infty} n\cdot (1-p)^{n+m-2}p^2,\\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\left(m\cdot(1-p)^{2m-3}p^2\sum_{n=m}^{\infty}(1-p)^{n-m+1}\right)\\
&+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(n\cdot(1-p)^{2n-2}p^2\sum_{m=n+1}^{\infty} n\cdot(1-p)^{m-n}\right),\\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\left(m\cdot(1-p)^{2m-3}p^2\frac{1-p}{p}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(n\cdot(1-p)^{2n-2}p^2\frac{1-p}{p}\right),\\
&= \left(\frac{p}{(1-p)^2}+\frac{p}{1-p}\right)\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot(1-p)^{2n} = \frac{p(2-p)}{(1-p)^2}\cdot\frac{(1-p)^2}{(1-(1-p)^2)^2},\\
&= \frac{1}{p(2-p)}.
\end{aligned}
$$

Se tiene que $V = X - Y$ por lo que $\mathbb{E}(V) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y) = 0$ porque las dos variables tienen igual distribución y por ende igual esperanza.

Siendo $U\cdot V = X\cdot\min\{X,Y\} - Y\cdot\min\{X,Y\}$. Pero como $X\cdot\min\{X,Y\}$ y $Y\cdot\min\{Y,X\}$ claramente tienen la misma distribución se tiene que $\mathbb{E}(U\cdot V)=0$.

Usando la distribuciónes de U y V

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(U) &= \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot \mathbb{P}(U=n) = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot (1-p)^{2n-2}p(2-p),\\
&= \frac{p(2-p)}{(1-(1-p)^2)^2} = \frac{1}{p(2-p)}.
\end{aligned}
$$

Dado que $\mathbb{P}(V=m) = \mathbb{P}(V=-m)$:

$$
\mathbb{E}(V) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} m\cdot \mathbb{P}(V=m) = 0.
$$

Como U y V resultan independientes $\mathbb{E}(U \cdot V) = \mathbb{E}(U) \cdot \mathbb{E}(V) = 0$.

(iii) Son independientes basta notar que para cualquier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $m \in \mathbb{Z}$ se tiene que:

$$\mathbb{P}(U = n, V = m) = (1-p)^{2n+m-2} p^2 = \mathbb{P}(U = n) \cdot \mathbb{P}(V = m).$$

3 (i) Por definición y sabiendo que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{\beta^n}{n!} = e^\beta$ para cualquier $\beta\in\mathbb{R}$, se tendrá que:

$$\varphi_Y(t) = \mathbb{E}(e^{t\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} e^{t\frac{n-\lambda}{\sqrt{\lambda}}} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} = e^{-t\sqrt{\lambda}-\lambda} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(e^{\frac{t}{\sqrt{\lambda}}}\lambda)^n}{n!} = e^{-t\sqrt{\lambda}-\lambda}\cdot e^{e^{\frac{t}{\sqrt{\lambda}}}\lambda}.$$

(ii) Por definición y sabiendo que $-\frac{z^2}{2}+tz = -\frac{1}{2}\left(z-\frac{t}{2}\right)^2 + \frac{t^2}{2}$ y que la densidad integra 1 se tendrá que:

$$\varphi_Z(t) = \mathbb{E}(e^tZ) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-z^2}{2}}\,dz = \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(z-\frac{t}{2}\right)^2}\,dz = e^{\frac{t^2}{2}}.$$

(iii) Usando la indicación y una vez mas sabiendo que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{\beta^n}{n!} = e^\beta$ para cualquier $\beta\in\mathbb{R}$. Dado $t\in\mathbb{R}$

$$\log\varphi_Y(t) = \left(-t\sqrt{\lambda}-\lambda+e^{\frac{t}{\sqrt{\lambda}}}\lambda\right) = \left(-t\sqrt{\lambda}-\lambda+\lambda\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right)^n}{n!}\right)\right),$$
$$= \left(\lambda\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right)^n}{n!}\right) = \left(\frac{t^2}{2}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\lambda^{\frac{2-n}{2}}\right)$$

Para $n\geq 3$ se tiene que $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda^{\frac{2-n}{2}} = 0$ y por otro lado la serie $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\lambda^{\frac{2-n}{2}}$ es convergente por lo tanto se tendrá que $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\lambda^{\frac{2-n}{2}} = 0$. Por lo tanto:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\log\varphi_Y(t) = \frac{t^2}{2}$$

Como la exponencial es continua y usando (ii) se tiene que $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\varphi_Y(t) = e^{\frac{t^2}{2}} = \varphi_Z(t)$.