MA34A-02
Profesor: Pierre-Paul Romagnoli
Auxiliar: Rodrigo Dávila

PAUTA CONTROL 3

1.-

(i) Por independencia la densidad conjunta de X, Y es:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-x^2}{2}} e^{\frac{-y^2}{2}}$$

Se quiere calcular la distribución de $U = \frac{X}{Y}$, agregando $V = Y$ se tiene que $X = UV$ y $Y = V$ con lo que se tiene que:

$$f_{UV}(u,v) = f_{XY}(uv,v) \cdot \left| det \begin{pmatrix} v & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2\pi} |v| e^{\frac{-u^2v^2}{2}} e^{\frac{-v^2}{2}}$$

Para calcular f_U basta integrar con respecto a v:

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} |v| e^{\frac{-(1+u^2)v^2}{2}} dv = 2 \int_{0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} v e^{\frac{-(u^2+1)v^2}{2}} dv = \frac{1}{\pi} \frac{e^{\frac{-(u^2+1)v^2}{2}}}{(1+u^2)} \Big|_{\infty}^{0} = \frac{1}{\pi(1+u^2)}$$

El cálculo también se puede hacer directamente, es decir:

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \frac{d}{du} I\!P\left[\frac{X}{Y} \leq u\right] = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{du} \left(\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{yu} + \int_{-\infty}^{0} \int_{yu}^{\infty} \right) e^{\frac{-x^2}{2}} e^{\frac{-y^2}{2}} \, dx \, dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\infty} y e^{\frac{-y^2u^2}{2}} e^{\frac{-y^2}{2}} \, dy - \int_{-\infty}^{0} y e^{\frac{-y^2u^2}{2}} e^{\frac{-y^2}{2}} \, dy \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} y e^{\frac{-(1+u^2)y^2}{2}} \, dy \\ &= \frac{1}{\pi(1+u^2)} \end{aligned}$$

(ii) La densidad condicional de X dado Θ es:

$$f_{X|\Theta}(x,\theta) = \frac{|\theta|}{2} \mathbb{1}_{[-\frac{1}{|\theta|}, \frac{1}{|\theta|}]}(x)$$

Como Θ tiene densidad $N(0,1)$ entonces:

$$f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{X|\Theta}(x,\theta) f_\Theta(\theta)\, d\theta = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\theta|}{2} \mathbb{1}_{[-\frac{1}{|\theta|},\frac{1}{|\theta|}]}(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-\theta^2}{2}}\, d\theta$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\theta|}{2} \mathbb{1}_{[-\frac{1}{|x|},\frac{1}{|x|}]}(\theta) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-\theta^2}{2}}\, d\theta = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\frac{1}{|x|}}^{\frac{1}{|x|}} |\theta| e^{\frac{-\theta^2}{2}}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\frac{1}{|x|}} \theta e^{\frac{-\theta^2}{2}}\, d\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-\theta^2}{2}} \Big|_{\frac{1}{|x|}}^{0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(1 - e^{-\frac{1}{2x^2}}\right)$$

2.- Por ser uniforme en el Toro la densidad conjunta de X, Y, Z es:

$$f_{XYZ}(x,y,z) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi^2} & \text{Si } x,y,z \in Toro \\ 0 & \text{Si } x,y,z \notin Toro \end{cases}$$

Para el método del Jacobiano cuando r está en $[0,1]$, θ en $[0,2\pi]$ y ϕ en $[0,2\pi]$:

$$\begin{aligned} f_{R\Theta\Phi}(r,\theta,\phi) &= \frac{1}{4\pi^2}\left| det \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\cos\phi & -[2+r\cos\theta]\sin\phi \\ \cos\theta\sin\phi & -r\sin\theta\sin\phi & [2+r\cos\theta]\cos\phi \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{pmatrix}\right| \\ &= \frac{|-r[2+r\cos\theta](\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^2\phi+\cos^2\phi)|}{4\pi^2} \\ &= \frac{r[2+r\cos\theta]}{4\pi^2} \end{aligned}$$

Para calcular las marginales basta integrar con respecto a las demás variables, es decir para r en $[0,1]$, θ en $[0,2\pi]$ y ϕ en $[0,2\pi]$:

$$f_R(r) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r[2+r\cos\theta]}{4\pi^2}\,d\theta\,d\phi = \frac{2\pi r}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}[2+r\cos\theta]\,d\theta = \frac{2\pi r}{4\pi^2}4\pi = 2r$$

$$f_\Theta(\theta) = \int_0^{1}\int_0^{2\pi} \frac{r[2+r\cos\theta]}{4\pi^2}\,d\phi\,dr = \frac{2\pi}{4\pi^2}\int_0^{1}[2r+r^2\cos\theta]\,dr = \frac{1}{2\pi}\left(1+\frac{\cos\theta}{3}\right)$$

$$f_\Phi(\phi) = \int_0^{1}\int_0^{2\pi} \frac{r[2+r\cos\theta]}{4\pi^2}\,d\theta\,dr = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{1}4\pi r\,dr = \frac{1}{\pi}\frac{1}{2} = \frac{1}{2\pi}$$

Para calcular las esperanzas:

$$I\!E(R) = \int_0^1 r\cdot 2r\,dr = \frac{2}{3}$$

$$I\!E(\Theta) = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\left(\theta+\theta\frac{\cos\theta}{3}\right)\,d\theta = \pi + \frac{1}{6\pi}(\theta\cos\theta+\sin\theta)\Big|_0^{2\pi} = \pi$$

$$I\!E(\Phi) = \int_0^{2\pi}\phi\frac{1}{2\pi}\,d\phi = \pi$$

3.- Sea M la variable aleatoria que cuenta el número de personas en la cola cuando llega una persona. Sabemos que la distribución es exponencial de parámetro β.

Sean $T_1, \ldots, T_{M+1}$ los tiempos de atención de cada una de las M personas en la cola con T_{M+1} el tiempo de atención de la persona que llega. Se necesita calcular $\sum\limits_{i=1}^{M+1} T_i$.

Para cualquier i en $\{1, \ldots, M+1\}$ el tiempo de atención dependerá de que cajero atiende a esa persona.

Sea S_i la variable aleatoria que representa al cajero que atiende a la persona i. Si $S_i = n$ es decir el cajero n atiende a la persona i entonces su tiempo de atención será la esperanza de una distribución exponencial de parámetro λ_n es decir $\frac{1}{\lambda_n}$.

Sabemos además que para cada i la probabilidad de que lo atiendo el cajero n es proporcional a λ_n es decir debe ser $\frac{\lambda_n}{\sum_{n=1}^{N} \lambda_n}$.

Entonces:

$$I\!E(T_i) = I\!E(I\!E(T_i | S_i = n)) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\lambda_n} \frac{\lambda_n}{\sum_{n=1}^{N} \lambda_n} = \frac{N}{\sum\limits_{n=1}^{N} \lambda_n}$$

Si ahora se condiciona al numero de personas en la cola, se tendrá:

$$I\!E\left(\sum_{i=1}^{M+1} T_i / M = m\right) = \sum_{i=1}^{m+1} I\!E\,(T_i) = \frac{N(m+1)}{\sum\limits_{n=1}^{N} \lambda_n}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} I\!E\left(\sum_{i=1}^{M+1} T_i\right) &= I\!E\left(I\!E\left(\sum_{i=1}^{M+1} T_i / M = m\right)\right) = \sum_{m \in I\!N} \frac{N(m+1)}{\sum\limits_{n=1}^{N} \lambda_n} e^{-\beta} \frac{\beta^m}{m!} \\ &= \frac{N}{\sum\limits_{n=1}^{N} \lambda_n} \left(\sum_{m \in I\!N} m e^{-\beta} \frac{\beta^m}{m!} + \sum_{m \in I\!N} e^{-\beta} \frac{\beta^m}{m!} \right) = \frac{N}{\sum\limits_{n=1}^{N} \lambda_n} (\beta + 1) \end{aligned}$$