MA-34A Probab. y Procesos Estocásticos **27 de Noviembre, 1998**

Pauta Examen

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliar: G. Fuenzalida*

TIEMPO: 3.0 HRS.

PROBLEMA 1: Sea g:$[0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $0 \le g(x) \le 1$ cualquiera sea $x \in [0,1]$. Se quiere estimar

$$A = \int_0^1 g(x)dx\,.$$

El Método de Montecarlo para estimar A consiste en elegir $X_1,\ldots,X_n,Y_1,\ldots,Y_n$ al azar uniformemente distribuidas en el intervalo $[0,1]$ de manera independiente y estimar A por

$$\widehat{A}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\,,$$

donde Z_i es la variable aleatoria que toma el valor 1 si $Y_i \le g(X_i)$ y 0 en caso contrario.

Un método alternativo para estimar A consiste en elegir $X_1,\ldots,X_n$ al azar uniformemente distribuidas en el intervalo $[0,1]$ de manera independiente y estimar A por

$$\widehat{\Lambda}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i)\,.$$

(i).- Pruebe que $\mathbf{E}(\widehat{A}_n) = A$ y que $\mathbf{Var}(\widehat{A}_n) = A(1-A)/n$.

(ii).- Pruebe que $\mathbf{E}(\widehat{\Lambda}_n) = A$ y que $\mathbf{Var}(\widehat{\Lambda}_n) \le A(1-A)/n$.

(iii).- Pruebe que si $c > 0$ entonces $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|\widehat{A}_n - \mathbf{E}(\widehat{A}_n)| > c\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|\widehat{\Lambda}_n - \mathbf{E}(\widehat{\Lambda}_n)| > c\right) = 0$.

(iv).- Observe que $0 \le A \le 1$ y pruebe que con probabilidad al menos $39/40$ ambos métodos obtienen una estimación de A con un error menor a $1/10$ cuando $n \ge 1000$.

SOLUCIÓN:

(i).- Por definición de $\widehat{A}_n$ se tiene que $\mathbf{E}(\widehat{A}_n) = (\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}(Z_i))/n$. Pero,

$$\mathbf{E}(Z_i) = \mathbb{P}(Z_i = 1) = \mathbb{P}(Y_i \le g(X_i)) = \int_0^1\int_0^{g(x)} f_{X_i,Y_i}(x,y)dydx = \int_0^1 g(x)dx = A\,,$$

donde la primera igualdad se debe a que Z_i es una variable aleatoria de Bernoulli, la segunda por definición de Z_i, la tercera por definición de función densidad conjunta y puesto que $f_{X_i,Y_i}(x,y) = 0$ salvo si x e y están en $[0,1]$, la cuarta dado que $f_{X_i,Y_i}(x,y) = f_{X_i}(x)f_{Y_i}(y) = 1$ para todo x e y en $[0,1]$, y la última por definición de A. Sigue inmediatamente que $\mathbf{E}(\widehat{A}_n) = A$.

Calculemos ahora la varianza de $\widehat{A}_n$. Primero observamos que Z_i sólo depende de X_i e Y_i, por lo que $Z_1, \ldots, Z_n$ son independientes. Luego, por definición de $\widehat{A}_n$, se tiene que $\mathbf{Var}(\widehat{A}_n) = (\sum_{i=1}^n \mathbf{Var}(Z_i))/n^2$. Pero,

$$\mathbf{Var}(Z_i) \;=\; \mathbf{E}(Z_i^2) - \mathbf{E}^2(Z_i) \;=\; \mathbf{E}(Z_i) - \mathbf{E}^2(Z_i) \;=\; A(1-A)\,,$$

donde la primera igualdad es una identidad conocida, la segunda se debe a que $Z_i^2 = Z_i$, y la última sigue del hecho establecido anteriormente concerniente la esperanza de Z_i. Sigue inmediatamente que $\mathbf{Var}(\widehat{A}_n) = A(1-A)/n$.

(ii).- Por definición de $\widehat{\Lambda}_n$ se tiene que $\mathbf{E}(\widehat{\Lambda}_n) = (\sum_{i=1}^n \mathbf{E}(g(X_i)))/n$. Pero,

$$\mathbf{E}(g(X_i)) \;=\; \int_{\mathbb{R}} g(x) f_{X_i}(x)dx \;=\; \int_0^1 g(x)dx \;=\; A\,,$$

donde la primera igualdad es la fórmula de la esperanza de una función de una variable aleatoria absolutamente continua, la segunda porque $f_{X_i}(x) = 1$ para todo x en $[0,1]$ y 0 en caso contrario, y la última por definición de A. Sigue inmediatamente que $\mathbf{E}(\widehat{\Lambda}_n) = A$.

Calculemos ahora la varianza de $\widehat{\Lambda}_n$. Primero observamos que $g(X_i)$ sólo depende de X_i, por lo que $g(X_1), \ldots, g(X_n)$ son independientes. Luego, por definición de $\widehat{\Lambda}_n$, se tiene que $\mathbf{Var}(\widehat{\Lambda}_n) = (\sum_{i=1}^n \mathbf{Var}(g(X_i)))/n^2$. Pero,

$$\mathbf{Var}(g(X_i)) \;=\; \mathbf{E}(g(X_i)^2) - \mathbf{E}^2(g(X_i)) \;\leq\; \mathbf{E}(g(X_i)) - \mathbf{E}^2(g(X_i)) \;=\; A(1-A)\,,$$

donde la primera igualdad es una identidad conocida, la segunda se debe a que $0 \leq g(x) \leq 1$ para todo $x \in [0,1]$ implica que $\mathbf{E}(g(X_i)^2) \leq \mathbf{E}(g(X_i))$, y la última sigue del hecho establecido anteriormente concerniente a la esperanza de $g(X_i)$. Sigue inmediatamente que $\mathbf{Var}(\widehat{A}_n) = A(1-A)/n$.

(iii).- Ambos límites son consecuencia directa de la aplicación de la Ley de los Grandes Números en su versión débil.

(iv).- Observar que

$$\mathbb{P}\left(|\widehat{A}_n - A| > 1/10\right) \;\leq\; \frac{\mathbf{Var}(\widehat{A}_n)}{1/100} \;=\; \frac{A(1-A)}{n/100} \;\leq\; \frac{A(1-A)}{10} \;\leq\; \frac{1}{40}\,,$$

donde la primera desigualdad es consecuencia de Chebyshev, la segunda desigualdad porque $n \geq 1000$, y la última desigualdad porque $A(1-A)$ alcanza su máximo en $A = 1/2$ por lo que $A(1-A) \leq 1/4$. Sigue entonces que

$$\mathbb{P}\left(|\widehat{A}_n - A| \leq 1/10\right) \;=\; 1 - \mathbb{P}\left(|\widehat{A}_n - A| > 1/10\right) \;\geq\; 1 - \frac{1}{40} \;=\; \frac{39}{40}\,.$$

El mismo argumento permite concluir que $\mathbb{P}\left(|\widehat{\Lambda}_n - \Lambda| \leq 1/10\right) \geq 1/40$.

PROBLEMA 2: Considere el siguiente juego entre A y B:

(1) A le paga C pesos a B por acceder a jugar.
(2) A lanza un dado cuyo resultado X se distribuye como una geométrica de parámetro $p \in]0,1[$.[1]
(3) B lanza el mismo dado lanzado por A hasta obtener un valor estrictamente mayor que el valor obtenido por A. Si un lanzamiento de B resulta en un valor menor o igual al obtenido por A, entonces B le paga 1 peso a A antes de volver a lanzar el dado.

[1] Observe que el dado es muy peculiar pues debe tener infinitas caras.

(i).- Sea Y_m el monto pagado por B a A cuando A obtiene m al lanzar el dado. Pruebe que

$$\mathbf{E}(Y_m) \;=\; \frac{1}{\mathbb{P}\,(X>m)}-1 \;=\; \frac{1}{(1-p)^m}-1\,.$$

(ii).- Sea Y el monto que B le paga a A. Pruebe que $\mathbf{E}(Y)=\sum_{m=1}^{\infty}\mathbf{E}(Y_m)\mathbb{P}\,(X=m)$, y calcule $\mathbf{E}(Y)$.

(iii).- Suponga ahora que el resultado del dado ya no se distribuye como una geométrica, sino como una variable aleatoria absolutamente continua que sólo toma valores positivos y cuya función densidad $f{:}\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es continua. Pruebe que para ningún valor de C el juego es justo, es decir que para ningún valor de C la ganancia esperada de cada jugador es 0.

Indicación: Sea Y la variable aleatoria que representa el monto que B le cancela a A. Sea Y_x la variable aleatoria que representa el monto que B le cancela a A *cuando* A obtiene x al lanzar el dado. Utilice (sin demostrarlo) que $\mathbf{E}(Y)=\int_0^{\infty}\mathbf{E}(Y_x)f(x)dx$.

SOLUCIÓN:

(i).- Supongamos que A obtiene m al lanzar el dado. Al jugador B le conviene terminar el juego lo antes posible. Para él, es un éxito el obtener un valor mayor que m al lanzar el dado. Dicho evento ocurre con probabilidad $\mathbb{P}\,(X>m)$. Como B lanza el dado hasta obtener un éxito, el número esperado de lanzamientos que B hace del dado sigue una geométrica de parámetro $\mathbb{P}\,(X>m)$. Luego, el número esperado de lanzamientos que B hace del dado es $(\mathbb{P}\,(X>m))^{-1}$. Como B le paga 1 peso a A por cada lanzamiento excepto el último, sigue que

$$\mathbf{E}(Y_m) \;=\; \frac{1}{\mathbb{P}\,(X>m)}-1\,.$$

Finalmente, observemos que como X sigue una geométrica de parámetro p, si $q=1-p$ entonces

$$\mathbb{P}\,(X>m) \;=\; \sum_{i=m+1}^{\infty} q^{i-1}p \;=\; q^m\sum_{i=1}^{\infty}q^{i-1}p \;=\; q^m \;=\; (1-p)^m\,.$$

(ii).- Como Y es una variable aleatoria discreta a valores en $\mathbb{N}$, $\mathbf{E}(Y)=\sum_{j=0}^{\infty}j\mathbb{P}\,(Y=j)$. Pero,

$$\mathbb{P}\,(Y=j) \;=\; \sum_{m=1}^{\infty}\mathbb{P}\,(Y=j,X=m) \;=\; \sum_{m=1}^{\infty}\mathbb{P}\,(Y_m=j,X=m) \;=\; \sum_{m=1}^{\infty}\mathbb{P}\,(Y_m=j)\,\mathbb{P}\,(X=m)\;,$$

donde la primera igualdad es consecuencia de la regla de las probabilidades totales, la segunda por definición de Y_m, y la tercera es por independencia de Y_m y X. Luego,

$$\mathbf{E}(Y) \;=\;=\; \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty}j\mathbb{P}\,(Y_m=j)\right)\mathbb{P}\,(X=m) \;=\; \sum_{m=1}^{\infty}\mathbf{E}(Y_m)\mathbb{P}\,(X=m)\;,$$

Si $q=1-p$, entonces por (i) y dado que $\mathbb{P}\,(X=m)=q^{m-1}p$ sigue que

$$\mathbf{E}(Y) \;=\; \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{q^m}-1\right)q^{m-1}p \;=\; \left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{p}{q}\right)-\left(\sum_{m=1}^{\infty}q^{m-1}p\right) \;=\; \left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{p}{q}\right)-1 \;=\; \infty\,.$$

(iii).- El mismo argumento utilizado en (i) permite concluir que si $F(\cdot)$ es la función distribución de X entonces

$$\mathbf{E}(Y_x) = \frac{1}{\mathbb{P}(X > x)} - 1 = \frac{1}{1 - F(x)} - 1.$$

Observando que $f(x) = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ y que

$$\mathbf{E}(Y) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-F(x)} - 1\right) F'(x)dx = \left(\ln\frac{1}{1-F(x)} - F(x)\right)\Big|_0^\infty = \infty,$$

donde la primera igualdad sigue de la indicación, la segunda corresponde a integrar, y la última puesto que como X no toma valores negativos sabemos que $F(0) = 0$ y como $F(\cdot)$ es función distribución se tiene que $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$. Como la ganancia esperada de A y B es $\mathbf{E}(Y - C)$ y $\mathbf{E}(C - Y)$ respectivamente, y $\mathbf{E}(Y) = \infty$, entonces para ningún valor de C se tiene que $\mathbf{E}(Y) = C$, es decir, el juego nunca es justo.

PROBLEMA 3: Sea $\rho \in \mathbb{R}$ y $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ una sucesión infinita de variable aleatorias independientes con distribución normal de media μ y varianza σ^2. Sea además

$$M = \begin{cases} 0 & \text{si } X_n \leq \rho \text{ para todo } n > 0, \\ m & \text{si } m = \min\{n > 0 \,:\, X_n > \rho\}. \end{cases}$$

(i).- Pruebe que si $m > 0$, entonces $\mathbb{P}(M = 0) \leq \prod_{i=1}^{m} \mathbb{P}(X_i \leq \rho)$. Concluya que $\mathbb{P}(M = 0) = 0$.

(ii).- Sea Y la variable aleatoria definida por $Y = \begin{cases} \rho & \text{si } X_n \leq \rho \text{ para todo } n > 0, \\ X_m & \text{si } m = \min\{n > 0 \,:\, X_n > \rho\}. \end{cases}$

Pruebe que existe un $c \in \mathbb{R}$ tal que la función densidad de la variable aleatoria Y es

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < \rho, \\ (c/\sqrt{2\pi}\sigma)e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\mu)^2} & \text{si } y \geq \rho. \end{cases}$$

<u>Indicación</u>: Pruebe primero que $\mathbb{P}(Y \leq t) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_m \leq t, X_1 \leq \rho, \ldots, X_{m-1} \leq \rho, X_m > \rho)$.

(iii).- Pruebe que $c^{-1} = \int_{(\rho-\mu)/\sigma}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$ y que $\mathbf{E}(Y) = \mu + c\,\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\rho-\mu)^2}$.

(iv).- Es de público conocimiento que el proceso utilizado en Francia para la fabricación de los panes hace que su peso se distribuya (aproximadamente) de acuerdo a una normal cuya desviación standard es 50 grs. Una panadería francesa vende panes cuyo peso promedio es 950 grs pero asegura que sus panes pesan en promedio 1000 grs. Un cliente sospechando el engaño registra, durante un largo período, el peso del pan que compra cada mañana. Con los datos registrados por el cliente, ¿cómo puede este comprobar el engaño?

Acumulada suficiente evidencia acerca del engaño el cliente amenaza al panadero con demandarlo si no enmienda su actitud. Temeroso de una demanda pero deseoso de no reducir sus ganancias, el panadero cada mañana pesa sus panes hasta encontrar uno de más de 1000 grs y lo guarda aparte para entregárselo al mencionado cliente cuando este último se presenta en la panadería. Pasado un largo y apacible período el cliente interpone una demanda contra el panadero. ¿Cómo pudo el cliente determinar que el panadero seguía estafando a su clientela?

SOLUCIÓN:

(i).- Sea $m > 0$. Observar que

$$\mathbb{P}(M=0) \;\le\; \mathbb{P}(X_1 \le \rho, \ldots, X_m \le \rho) \;=\; \prod_{i=1}^{m} \mathbb{P}(X_i \le \rho) \;=\; \prod_{i=1}^{m} \mathbb{P}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma} \le \frac{\rho-\mu}{\sigma}\right),$$

donde la primera desigualdad se debe a que $M=0$ implica que $X_1 \le \rho, \ldots, X_m \le \rho$, la primera igualdad se debe a que $X_1, \ldots, X_m$ son independientes, y la última es obvia. Luego, como X_i es una normal de media μ y varianza σ^2,

$$\mathbb{P}(M=0) \;=\; \left[\phi\left(\frac{\rho-\mu}{\sigma}\right)\right]^m.$$

Observando que $\phi\left(\frac{\rho-\mu}{\sigma}\right) < 1$ se obtiene la conclusión deseada haciendo m tender a infinito.

(ii).- Calcularemos primero la función distribución de Y, es decir $F_Y(\cdot)$. Comenzamos observando que Y nunca toma valores menores que ρ, luego $F_Y(t) = 0$ para todo $t < \rho$. Sigue que $f_Y(t) = 0$ si $t < \rho$. Supongamos entonces que $t \ge \rho$ y calculemos $F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \le t)$. Para ello observar que,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \le t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y \le t, M=m) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_m \le t, M=m) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_m \le t, X_1 \le \rho, \ldots, X_{m-1} \le \rho, X_m > \rho),
\end{aligned}$$

donde la primera igualdad es consecuencia de la regla de las probabilidades totales, la segunda se tiene por definición de Y y puesto que $0 \le \mathbb{P}(Y \le t, M=0) \le \mathbb{P}(M=0) = 0$ implica que $\mathbb{P}(Y \le t, M=0) = 0$, y la última es por definición de M. Como $X_1, \ldots, X_m$ son independientes

$$\mathbb{P}(Y \le t) \;=\; \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(\rho < X_m \le t) \left(\prod_{i=1}^{m-1} \mathbb{P}(X_i < \rho)\right).$$

Pero,

$$\mathbb{P}(\rho < X_m \le t) \;=\; \mathbb{P}\left(\frac{\rho-\mu}{\sigma} < \frac{X_m-\mu}{\sigma} \le \frac{t-\mu}{\sigma}\right) \;=\; \phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{\rho-\mu}{\sigma}\right),$$

y

$$\mathbb{P}(X_i < \rho) \;=\; \mathbb{P}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma} \le \frac{\rho-\mu}{\sigma}\right) \;=\; \phi\left(\frac{\rho-\mu}{\sigma}\right).$$

Juntando todo lo anterior, se concluye que

$$\mathbb{P}(Y \le t) \;=\; \left[\phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{\rho-\mu}{\sigma}\right)\right] \sum_{m=1}^{\infty} \phi\left(\frac{\rho-\mu}{\sigma}\right)^{m-1} \;=\; \frac{\phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{\rho-\mu}{\sigma}\right)}{1-\phi\left(\frac{\rho-\mu}{\sigma}\right)}.$$

Luego, derivando con respecto a t se concluye que si $t \geq \rho$, entonces

$$f_Y(t) \;=\; \frac{c}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(t-\mu)^2}\,, \qquad c^{-1} \;=\; 1-\phi\left(\frac{\rho-\mu}{\sigma}\right).$$

(iii).- En la parte anterior ya se determino el valor de c^{-1}, una forma alternativa de calcular c^{-1} se deriva del hecho que la función densidad de Y debe integrar a 1 sobre $\mathbb{R}$. Luego,

$$1 \;=\; c\int_{\mathbb{R}} f_Y(y)dy \;=\; c\int_{\rho}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\mu)^2}dy \;=\; c\int_{(\rho-\mu)/\sigma}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx\,,$$

donde la última igualdad se obtiene haciendo el cambio de variable $x = (y-\mu)/\sigma$. La conclusión deseada acerca del valor de c^{-1} es inmediata.

Para calcular la esperanza de Y observar que

$$\mathbf{E}(Y) \;=\; \int_{\mathbb{R}} y f_Y(y)dy \;=\; c\int_{\rho}^{+\infty} \frac{y}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\mu)^2}dy \;=\; c\int_{(\rho-\mu)/\sigma}^{+\infty} \frac{\sigma x+\mu}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2}dx\,,$$

donde las dos primeras igualdades son obvias y la última se obtiene haciendo el cambio de variable $x = (y-\mu)/\sigma$. La conclusión deseada se obtiene observando que

$$\int_{(\rho-\mu)/\sigma}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx \;=\; -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\Big|_{(\rho-\mu)/\sigma}^{\infty} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\rho-\mu)^2}\,,$$

y recordando que

$$c^{-1} \;=\; \int_{(\rho-\mu)/\sigma}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2}dx\,.$$

(iv).- Hay muchas posibles forma de abordar esta parte. Una de ellas consiste en que el cliente lo que hace es discretizar convenientemente $\mathbb{R}$ y va calculando un histograma de las frecuencias con que los pesos de los panes caen en cada uno de los intervalos de la discretización.

En el primer caso, después de muchas mediciones el histograma se parecerá al gráfico de la función densidad de una normal de media 950 grs y desviación 50 grs. Lo anterior contradice la afirmación del panadero con respecto al peso promedio de sus panes.

En el segundo caso, después de muchas mediciones el histograma se parecerá al gráfico de la cola de una función densidad de una normal de media 950 grs y desviación 50 grs correspondiente a valores mayores que 1000 grs. Por (ii) y (iii) dicho histograma se parecerá al gráfico de la función

$$f_Y(y) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } y < \rho, \\ \frac{1}{1-\phi(\frac{\rho-\mu}{\sigma})}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\mu)^2} & \text{si } y \geq \rho. \end{cases}$$

Lo anterior indica al cliente que el panadero no cambio su procedimiento de fabricación de los panes.