MA34A-02
Profesor: Pierre-Paul Romagnoli
Auxiliar: Rodrigo Dávila

PAUTA EXAMEN

1.- La probabilidad de que el elemento n quede fijo es $\frac{1}{N}$, por lo tanto:

$$I\!P(S_n = 1) = \frac{1}{N},\; I\!P(S_n = 0) = \frac{N-1}{N}$$

$$I\!E\left(S_n\right) = I\!E\left(S_n^2\right) = \frac{1}{N},\; V(S_n) = \frac{1}{N} - \frac{1}{N}^{2} = \frac{(N-1)}{N^2}$$

Es claro que las variables S_n y S_m no son independientes pero para n distinto de m la ley de $S_n \cdot S_m$ es fácil. La probabilidad de que tanto n como m queden fijos es $\frac{1}{N(N-1)}$. Por lo tanto para n distinto de m:

$$I\!E\left(S_n \cdot S_m\right) = I\!E\left(S_n^2 \cdot S_m^2\right) = \frac{1}{N(N-1)}$$

$$COV(S_n, S_m) = \frac{1}{N(N-1)} - \frac{1}{N^2} = \frac{1}{N^2(N-1)}$$

Por la linealidad de la esperanza:

$$I\!E\left(S\right) = I\!E\left(\sum_{n=1}^{N} S_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{N} = 1$$

$$\begin{aligned}
V(S) &= \sum_{n=1}^{N} V(S_n) + 2 \cdot \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=n+1}^{N} COV(S_n, S_m) \\
&= \frac{N(N-1)}{N^2} + \frac{2}{N^2(N-1)} \frac{(N-1)N}{2} \\
&= \frac{N(N-1)}{N^2} + \frac{1}{N} \\
&= 1
\end{aligned}$$

2.- Como X,Y son independientes entonces la densidad conjunta de X, Y es:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{\frac{-x^2 - y^2}{2\sigma^2}}$$

(i) Es claro que U sólo toma valores positivos y que V es irresctricta. Para usar el método del Jacobiano no es necesario despejar X e Y en efecto:

$$\left| det \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{-2x^2}{y^2} - 2 \right| = 2(v^2+1)$$

Por lo tanto para u positivo:

$$f_{UV}(u,v) = \frac{\frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{\frac{-u}{2\sigma^2}}}{2(v^2+1)} = \frac{1}{4\sigma^2} e^{\frac{-u}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\pi(v^2+1)} = f_U(u) \cdot f_V(v)$$

Lo que implica que U y V son independientes.

(ii) Para calcular la conjunta de Y y $\sqrt{(X^2+Y^2)}$ una vez más por el método del Jacobiano si notamos $Z = \sqrt{(X^2+Y^2)}$ y $W = Y$. Es claro que Z es positivo y $|W|$ es siempre menor Z.

$$\left| det \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \frac{\sqrt{z^2-w^2}}{z}$$

Por lo tanto:

$$f_{ZW}(z,w) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{\frac{-z^2}{2\sigma^2}} \frac{z}{\sqrt{z^2-w^2}}$$

Falta calcular $f_Z(z)$:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{ZW}(z,w)\, dw = \frac{1}{2\pi\sigma^2} z e^{\frac{-z^2}{2\sigma^2}} \int_{-z}^{z} \frac{1}{\sqrt{z^2-w^2}}\, dw$$
$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2} z e^{\frac{-z^2}{2\sigma^2}} \arcsin \frac{z}{w} \Big|_{-z}^{z} = \frac{1}{2\sigma^2} z e^{\frac{-z^2}{2\sigma^2}}$$

Por lo tanto si z es positivo y $|w|$ es menor que z:

$$f_{W|Z}(w,z) = \frac{\frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{\frac{-z^2}{2\sigma^2}} \frac{z}{\sqrt{z^2-w^2}}}{\frac{1}{2\sigma^2} z e^{\frac{-z^2}{2\sigma^2}}} = \frac{1}{\pi\sqrt{z^2-w^2}}$$

Finálmente:

$$I\!E(Y|\sqrt{X^2+Y^2}) = \int_{-z}^{z} \frac{w}{\pi\sqrt{z^2-w^2}}\, dw = 0$$