

## Control 1 - Probabilidades y Procesos Estocásticos - 2008

Profesor: Iván Rapaport  
Auxiliar: Abelino Jiménez

### Pregunta 1.

a.- (3 puntos) (1.5 puntos) Sea  $X$  una v.a. binomial  $(n, p)$ . Muestre que:

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{1+X}\right] = \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{(n+1)p}$$

b.- (3 puntos) Hay  $n$  islas. La probabilidad de que el tesoro esté en alguna de las islas es 0.5. El tesoro tiene la misma probabilidad de encontrarse en cualquiera de las islas. Si usted es un pirata que ha visitado  $n-1$  islas y en ninguna estaba el tesoro ¿Cuál es la probabilidad de que éste se encuentre en la  $n$ -ésima isla?

**Pregunta 2.** Sea  $\mathcal{C} = \mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$ , el conjunto de los subconjuntos de  $\{1, \dots, n\}$ . Por ejemplo, si  $n = 2$ ,  $\mathcal{C} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{1\}, \{2\}\}$ . Se realiza el siguiente experimento: se toman independientemente y de manera equiprobable dos elementos de  $\mathcal{C}$  no necesariamente distintos que llamamos  $A$  y  $B$ . Observe que  $A$  y  $B$  son subconjuntos de  $\{1, \dots, n\}$ .

a.- (2 puntos) Escriba un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  para este experimento.

b.- (4 puntos) Pruebe que la probabilidad de que  $A \subseteq B$  es  $(\frac{3}{4})^n$ .  
(Indicación: calcule la probabilidad de que  $A \subseteq B$  dado que  $|B| = k$ , para un  $k \in \{0, \dots, n\}$ .)

**Tiempo: 3 horas.**