MA37A Optimización. Semestre 2005-2
Profesor: Héctor Ramírez C. **Auxiliares:** Francisco Jara, Oscar Peredo.

Control 2

P1. Un parque de diversiones requiere dividir su nuevo terreno de 50 hectáreas en tres categorías: *Tiendas*, *Comida* y *Entretenciones*. Cada hectárea usada para Entretenciones genera un beneficio de 150 US$/hora; cada hectárea de Comida, 200 US$/hora y una de Tiendas, 300 US$/hora. Además, existe una serie de restricciones sobre como se debe dividir el terreno:

1. Sólo 20 hectáreas son utilizables por las tiendas.
2. Regulaciones sobre el terreno exigen por lo menos 1000 árboles en el parque, divididas en grupos de 20 árboles. Una hectárea de Comida genera 2 grupos de 20 árboles; una de Entretenciones, 1 grupo de 20 árboles y una de Tiendas no contiene árboles.
3. No más de 180 personas pueden trabajar en el parque. Se necesitan 3 personas por hectárea de Entretención; 6 por hectárea de Comida y 3 por hectárea de Tiendas.

Dada esta información, se le pide:

(a) Plantear el problema descrito como uno de programación lineal, con el fin de maximizar el beneficio del parque.

(b) Resolver vía Simplex Fases I y II. Debería llegar (salvo reordenamiento) al siguiente tableau óptimo:

0	0	0	100	0	150	200	9500
1	0	0	2	0	-1	-2	30
0	0	0	0	1	-1	-1	10
0	1	0	-1	0	0	1	10
0	0	1	0	0	1	1	10

Indicación: Note que la restricción sobre los trabajadores se puede factorizar.

(c) Suponga ahora que el ítem Comida sólo genera un beneficio de 180 US$/hora. ¿Cuál es la nueva solución del problema? Entregue el valor óptimo y una división óptima del terreno.

(d) Suponga que el concejo de la comuna estudia aumentar la cantidad de árboles necesaria, a 1020. ¿Cuánto le costará al parque esta modificación, y que será modificado? ¿y si aumenta a 1200? ¿y si ahora disminuye a 600?

(e) Una empresa inmobiliaria desea comprar 2 hectáreas al parque para construir edificios. ¿Cuánto es el mínimo monto (en US$/hora) que debería pedir el dueño del parque por este terreno?

(f) Ahora el parque está interesado en instalar una Piscina con Tobogán. Cada hectárea para la Piscina contiene 1 grupo de 20 árboles y requiere 4 trabajadores. ¿Cuánto beneficio debiera reportar esta piscina (en US$/hora) para considerar su construcción?

P2. Considere el siguiente problema de programación lineal:

$$(\mathcal{P})\quad \left\{\begin{array}{lll} \text{mín} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n & \\ s.a. & x_1 & \geqslant\ 1 \\ & x_1 + x_2 & \geqslant\ 2 \\ & x_1 + x_2 + x_3 & \geqslant\ 3 \\ & & \vdots \\ & x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n & \geqslant\ n \\ & x_i & \geqslant\ 0, \quad \forall\, i \in \{1, 2, \ldots n\}. \end{array}\right.$$

(a) Determine el problema dual $(\mathcal{D})$.

(b) Verifique que se tiene la propiedad de *dualidad fuerte*, i.e. $\text{val}(\mathcal{P}) = \text{val}(\mathcal{D})$.

(c) Mostrar que para todo y vector factible de $(\mathcal{D})$, se tiene:

$$y_k + y_{k+1} + \ldots + y_n < k, \qquad \forall\, k \in \{2, 3, \ldots, n\}.$$

(d) Siendo $\bar{x}$ el óptimo de $(\mathcal{P})$, deduzca del teorema de complementaridad, los valores $\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$.

(e) Resuelva el problema primal $(\mathcal{P})$, es decir, encuentre $\bar{x}$.

(f) Encuentre una solución optima del dual. ¿Es esta solución única?

P3. (a) Demuestre que un poliedro es acotado si y solo si no tiene direcciones extremas.

(b) Sea $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$ un poliedro convexo compacto (cerrado y acotado) en $\mathbb{R}^n$, con $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{m\times n}$ de rango m ($m < n$). Demuestre la siguiente equivalencia

$$\text{Cada elemento de } \mathcal{P} \text{ tiene al menos } m \text{ componentes mayores que cero}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\text{Cada punto extremo de } \mathcal{P} \text{ tiene exactamente } m \text{ componentes mayores que cero.}$$

Indicación: Use la caracterización de un poliedro en función de sus puntos extremos y sus direcciones extremas.

Tiempo: 3 horas.
Sin consultas.