Control 2, MA37A: Optimización
mayo, 2007
PROFESOR: JORGE AMAYA
AUXILIARES : RODRIGO LÓPEZ, FRANCISCO SILVA

Pregunta 1.- Definamos la envoltura convexa de un conjunto de puntos $\{x_1, ..., x_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ por

$$co(\{x_1, ..., x_m\}) := \{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i / \lambda_i \in [0,1] \forall i = 1, ..., m \wedge \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1\}$$

a. (1 pto.) Demuestre explícitamente que $co(\{x_1, ..., x_m\})$ es un conjunto convexo.

b. (2 ptos.) Demuestre que todo punto extremo de $co(\{x_1, ..., x_m\})$ es necesariamente uno de los puntos x_i.

c. (2 ptos.) Sean $A = \{a_1, ..., a_{m_1}\}$ y $B = \{b_1, ..., b_{m_2}\}$. Demostrar que

$$co(A \times B) = co(A) \times co(B)$$

d. (1 pto.) Calcule los puntos extremos del hipercubo en $\mathbb{R}^n$

$$[0,1]^n := \{z \in \mathbb{R}^n / z_i \in [0,1] \ \forall i = 1, ..., n\}$$

Pregunta 2.

a. Considere siguiente problema:

$$\text{Max} - 5x_1 + 5x_2 + 13x_3$$

$$\text{s.a } - x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 20$$

$$12x_1 + 4x_2 + 10x_3 \leq 90$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3$$

Haciendo que x_4, x_5 sean las variables de holgura, la tabla óptima de Simplex queda:

0	0	2	5	0	100
-1	1	3	4	0	20
16	0	-2	-4	1	10

Analice en los siguientes cambios (siempre con respecto al problema original), si la solución dada anteriormente sigue siendo óptima.

a.1 Cambie los coeficientes de x_1 a:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

a.2 Introduzca una nueva variable x_6 con coeficientes:

$$\begin{bmatrix} c_6 \\ a_{16} \\ a_{26} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

a.3 Introduzca una nueva restricción dada por $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 50$.

a.4 Cambie la segunda restricción por $10x_1 + 5x_2 + 10x_3 \leq 100$

b. Considere un problema PL de maximización con todas las restricciones del tipo "menor o igual ($\leq$)"tal que la tabla óptima del Simplex es:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{z}$
0	0	1/4	1/4	0	5
0	1	1/2	-1/2	0	2
1	0	-1/8	3/8	0	3/2
0	0	1	-2	1	4

donde x_3, x_4, x_5 son variables de holgura. Supongamos que se ha decidido incrementar el lado derecho de una de las restricciones. ¿Cuál recomendaría Ud. para ello y por qué? ¿Cuál es el mayor incremento posible en ese caso? Encontrar el correspondiente nuevo valor óptimo de la función objetivo.

Pregunta 3.

a Demuestre, usando el teorema de Farkas, que si el sistema:

$$A^t y \geq c$$

$$y \geq 0$$

no tiene solución, entonces el problema:

$$\max\ c^t x$$

$$Ax \leq 0$$

$$x \geq 0$$

es no acotado.

b Sea (P) el problema

$$\max\ c^t x$$

$$Ax = 0$$

$$x \geq 0$$

y suponga que es acotado. Demuestre que $\bar{x} = 0$ es solución de (P).