Control 3, MA37A: Optimización
12 de junio, 2007

PROFESOR: JORGE AMAYA
AUXILIARES : RODRIGO LÓPEZ, FRANCISCO SILVA

P1

La función de Cobb-Douglas es muy utilizada en Economía para representar la relación entre los inputs y los outputs de una firma. Toma la forma $Y = AL^{\alpha}K^{\beta}$, donde Y representa los outputs, L el trabajo y K el capital. Esta formulación puede ser aplicada a la utilida y toma la forma $u(x) = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$. Considere el problema de maximización de la utilidad:

$$\begin{array}{rcl} \max \ \ x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} & & \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 & \leq & w \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

donde $p_1, p_2 > 0$ son los precios y $w > 0$ el presupuesto.

a) Escriba las condiciones de KKT y encuentre explícitamente una solución x de ellas, en función del vector p, w y α. Sugerencia: transforme primero el problema, aplicando logaritmo, en otro equivalente, diciendo por qué es equivalente.
b) Se puede decir que esta solución es óptima para el problema original? Justifique.
c) Encuentre el multiplicador λ, en función de p, w y α.

P2

Use las condiciones de KKT para decidir si $\bar{x} = (2/3, 4/3, 1)^T$ y $\bar{x} = (4/5, 6/5, 0)^T$ son soluciones del problema:

$$\begin{array}{rcl} \min \ \ -2x_1 - 6x_2 - 2x_1x_2 + x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 & & \\ x_1 + x_2 & \leq & 2 \\ -x_1 + 2x_2 & \leq & 2 \\ x_3 & \leq & 2 \end{array}$$

P3

Considere tres centros productivos O1, O2 y O3, con ofertas respectivas de 5, 25 y 25. Hay además dos centros D1 y D2, con demandas 15 y 30. Suponga que la matriz de costos unitarios de transporte es

	D1	D2
O1	9	12
O2	1	1
O3	2	2

a) Plantear este problema como uno de transporte.
b) Encontrar una solución básica factible que contenga a los arcos (1, 1) y (1, 2).
c) Indique el valor de la función objetivo en esta solución e indique una cota inferior del valor óptimo.
d) Itere hasta encontrar una solución óptima y diga si es única (justifique).

e) Si se modifica el costo del arco (1,1) al valor 2, recalcule la (nueva) solución óptima.

P4

a) Sea

$$(P) \quad \min \psi(x), \; x \in \mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \; / \; Ax = b, \; x \geq 0\},$$

donde $\psi(x) = \max\{c_1^T x + b_1, \ldots, c_m^T x + b_m\}$ y $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}^n$, $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$. Probar que (P) es un problema convexo, equivalente a un problema de programación lineal.

b) Proponer un problema dual para (P).

c) Para el caso

$$(P) \quad \min \psi(x), \; x \in \mathbb{R}^n,$$

sea $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, dado. Demuestre que si $I = \{i = 1, \ldots, m \,/\, \psi(\bar{x}) = c_i^T \bar{x} + b_i\}$, y elegimos $\lambda_i \geq 0$, $i \in I$, tales que $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$, entonces

$$\xi = \sum_{i \in I} \lambda_i c_i$$

es un subgradiente de ψ en $\bar{x}$.

TIEMPO: 2 horas 30 minutos