Guía N^o 1 de Optimización MA37A/Prof: Jorge Amaya

Autor: José Saavedra (Charango)

Viernes 14 de Abril del 2000

Problema 1

Considere una fábrica con tres tipos de máquinas: A, B y C, que pueden producir cuatro productos: 1, 2, 3 y 4. Cada producto debe pasar por alguna operación en cada uno de los tres tipos de máquina. Suponga que la producción es continua (i.e. se puede producir una cantidad no necesariamente entera de productos) y que cada producto debe pasar primero por una máquina A, luego por una B y finalmente por una C. Suponga además que el tiempo requerido para ajustar las máquinas al cambiar de producto es despreciable. La tabla siguiente muestra: **1.-** Las horas requeridas en cada tipo de máquina por unidad de cada producto, **2.-** El tiempo total disponible por semana por máquina y **3.-** La ganancia por la venta de una unidad de cada producto.

Tipo de Máquina	Producto **1**	Producto **2**	Producto **3**	Producto **4**	Tiempo Total disponible por semana
A	1.5	1	2.4	1	2000
B	1	5	1	3.5	8000
C	1.5	3	3.5	1	5000
Ganancia por unidad	5.24	7.30	8.34	4.18	

Se desea determinar la producción semanal de cada producto que maximiza las ganancias. Plantee el problema como un problema de programación lineal.

Problema 2

Parte (a)

Una fábrica tiene tres bodegas: B_1, B_2 y B_3, donde tiene almacenadas b_1, b_2 y b_3 sillas respectivamente. Se tienen además cuatro puntos de venta: V_1, V_2, V_3 y V_4, donde se requieren v_1, v_2, v_3 y v_4 sillas respectivamente. Suponga que es posible enviar sillas desde cualquier bodega a cualquier punto de venta. Considere que el costo de llevar una silla de la bodega B_i al punto de venta V_j es c_{ij}. Se desea satisfacer las demandas minimizando el costo de transporte. Plantee este problema como un problema de programación lineal, haciendo las suposiciones que crea necesarias.

Parte (b)

Suponga que por problemas con el sindicato de camioneros, no se puede llevar más que d_{ij}

sillas desde B_i hasta V_j. Agregue las restricciones correspondientes para incorporar esta situación al planteamiento del problema anterior, y deduzca en que país está la fábrica.

Problema 3

Suponga que el productor de un artículo en particular conoce o es capaz de estimar la demanda de su producto para los próximos n meses. Se desea programar la construcción a lo largo de dichos n meses de modo de minimizar los costos variables totales. Asumiremos que el producto puede ser almacenado durante estos n meses. Habrá un costo asociado a mantener una unidad de producción en inventario durante un mes.

En algunas circunstancias, la sobreproducción puede ser provechosa, y en otras debe ser evitada. por ejemplo, podría ser que si se programa la producción para satisfacer exactamente la demanda durante algunos meses, se necesitaría mucha sobreproducción en ciertos meses de demanda especialmente alta. Por otro lado, ciertas cantidades de producto se pueden producir y almacenar en producción normal durante meses de baja demanda, para ser almacenados hasta que la demanda exceda la producción. En otros casos podría ser mejor sobreproducir en ciertos meses e ir almacenando, incluso con una demanda baja, porque el costo de producción puede ser menor durante dichos meses, tal vez por cambios de precios de la materia prima por temporadas u otras razones. El problema está en programar la producción de modo de balancear los costos de almacenaje contra los costos de sobreproducción (horas extra, máquinas, etc), para minimizar el costo variable total.

Plantee el problema como uno de programación lineal. Considere para estos efectos c_i el costo de producir una unidad en el mes i en jornada normal, el costo d_i de producir una unidad en el mes i en jornada extraordinaria, y el costo f_i de almacenar una unidad durante el mes i. Se tiene además como datos a_i, la capacidad de producción en jornada ordinaria en el mes i, a_i', la capacidad de sobreproducción en el mes i, y b_j la cantidad de unidades requeridas en el mes j. El programa lineal debe determinar la producción que minimize la suma de costos de producción y almacenamiento. (HINT: Considere como variables x_{ij}, el número de unidades producidas en jornada ordinaria en el mes i y vendidas en el mes j, e y_{ij}, el número de unidades producidas en jornada extraordinaria en el mes i y vendidas en el mes j)

Problema 4
Resuelva gráficamente los siguientes problemas:
(i)

$$\begin{aligned} \max z = 5x_1 &+ 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 &\leq 15 \\ 5x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \max z = 2.5x_1 &+ x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 &\leq 15 \\ 5x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} \min z = 2x_1 &+ 3x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 6x_1 + 2x_2 - x_4 &= 8 \\ x_1 + 5x_2 - x_5 &= 4 \\ x_1 &\leq 3 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned} \max z + 2x_1 &+ 2x_2 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= -1 \\ -0.5x_1 + x_2 + x_4 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned} \max z = -3x_1 &+ 2x_2 \\ x_1 &\leq 3 \\ x_1 - x_2 &\leq 0 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Problema 5

(a)

Sean

$$Z(b) = \max\{c^T x / Ax \leq b, \quad x \geq 0\}$$

$$V(c) = \max\{c^T x / Ax \leq b, \quad x \geq 0\}$$

Demuestre que Z es cóncava y V es convexa; asumiendo que b y c están en dominios convexos en los que estos dos problemas son factibles y acotados.

(b)

Demuestre que si, para todo $y \geq 0$ tal que $A^T y \geq 0$, se tiene $b^T y \geq 0$ entonces existe $x \geq 0$ tal que $Ax \leq b$.

Problema 6

Escriba un modelo de **programación lineal** para determinar una dieta que contenga al menos 0.5% de calcio pero no más de 1.2% del mismo, al menos 22% de proteínas y al menos 5% de fibra cruda. Los ingredientes son caliza, maíz y soya y los aportes (en Kg.), por cada Kg. de ingrediente son:

Ingrediente	Calcio	Proteínas	Fibra
Caliza	0.35	0	0
Maíz	0.001	0.09	0.02
Soya	0.002	0.5	0.08

Existen dos escenarios posibles para los costos ($/Kg)

	Caliza	Maíz	Soya
Escenario A	0.016	0.046	0.125
Escenario B	0.018	0.045	0.126

Se debe minimizar el costo por Kg, en el caso más desfavorable.

Problema 7

Escriba un modelo de P.L. para los problemas descritos a continuación.

(i) La National Free Transportation Agency (NAFTA), debe decidir un programa de formación y contratación de nuevas azafatas para los próximos seis meses.

Las exigencias a respetar son expresadas en horas de vuelo de azafatas: 8.000 en enero, 9.000 en febrero, 8.000 en marzo, 10.000 en abril, 9.000 en mayo y 12.000 en junio.

La formación de una nueva azafata dura un mes. Esta formación comprende 100 horas de vuelo en líneas de la compañía. Estas 100 horas se pueden deducir de exigencias que las azafatas deben cumplir, es decir, sirven para satisfacer las exigencias de horas de vuelo de azafatas de la compañía.

Cada azafata experimentada puede entregar hasta 150 horas de vuelo por mes. La compañía dispone de 60 azafatas experimentadas al 1 de enero.

Cada azafata experimentada recibe un sueldo de US$800 por mes, independientemente del número de horas que preste servicio. Cada mes, el 10% de las azafatas experimentadas deja su trabajo por diversas razones.

Al cabo de un mes de formación, que cuesta US$400 a la compañía, una azafata aprendiz se convierte en azafata experimentada.

(ii) Un granjero posee 100 hectáreas (ha.) que pueden ser utilizadas para el cultivo de trigo y maíz. El rendimiento por ha. es de 60 quintales anuales de trigo y de 95 quintales de maíz.

Cualquier fracción de las 100 ha. puede ser destinada al cultivo de trigo o maíz. El trabajo necesario es de 4 hrs. por ha. anuales, más 0.15 hr. por quintal de trigo y 0.70 hr. por quintal de maíz. El costo de las semillas y abono es de $20 por quintal de trigo y $12 por quintal de maíz.

El granjero puede vender su trigo a $175 el quintal y su maíz a $95 el quintal. A la compra, le costarían respectivamente $250 y $150. Puede también criar cerdos y pollos. Los vende cuando han alcanzado la edad de 12 meses. Un cerdo se vende a $4.000. Un ave se vende en términos de *cerdo-equivalente* (el número de pollos necesarios para obtener $4.000 al momento de la venta).

Un cerdo requiere 25 quintales de trigo o 20 quintales de maíz, aí como 25 hrs. de trabajo y 25 m^2 de terreno. Un cerdo-equivalente de pollos requiere 25 quintales de maíz o 10 quintales de trigo, así como 40 hrs. de trabajo y 15 m^2 de terreno.

El granjero dispone de 10.000 m^2 de terreno para la crianza. Dispone también de 2.000 hrs. de trabajo anuales y puede poner a su familia a trabajar, disponiendo así de 2.000 hrs. suplementarias. Puede también contratar horas suplementarias de obreros agrícolas al costo de $150 la hora.

Cada hora de obrero agrícola demanda 0.15 hr. de trabajo de supervisión de parte del granjero.

Determine las superficies a destinar al cultivo de trigo y/o maíz y las cantidades de cerdos y/o pollos a producir, de manera de maximizar el beneficio.

Explicite los supuestos usados en la modelación.

Problema 8
Considere el problema de P.L.

$$
\begin{array}{lrrrrrrrcl}
\min & x_1 & -2x_2 & -4x_3 & +2x_4 & & & & & \\
 & x_1 & & -2x_3 & & +x_5 & & & = & 4 \\
 & & x_2 & & -x_4 & & +x_6 & & = & 8 \\
 & -2x_1 & & +8x_3 & +x_4 & & & +x_7 & = & 12 \\
 & & & & & & & x & \geq & 0
\end{array}
$$

Se propone una solución con x_5, x_6, x_7 en la base.
a) ¿Es factible?
b) ¿Es óptima?

Se propone una solución con x_1, x_2, x_3 en la base.
c) ¿Es factible?
d) ¿Es óptima?

e) Determinar una solución óptima del problema dual[1].

Problema 9
Considere el problema:

$$
\begin{array}{lllcl}
(P) & \min & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i & & \\
 & & \sum_{i=1}^{n} a_i x_i & = & b \\
 & & x & \geq & 0
\end{array}
$$

donde $c_1, \ldots, c_n, a_1, \ldots, a_n, b$ son reales y $b > 0$. También $a_i \neq 0, \ \forall i$

(a) Escriba el dual de (P) y estudie su factibilidad, acotamiento y solución óptima.
(b) Estudie, para (P), la factibilidad y acotamiento y determine el valor óptimo Z^*.

[1] Dualidad no entra en este control, es optativo para quien lo quiera hacer

Problema 10
Resuelva el problema:

$$
\begin{array}{lllllllll}
\max & & 9x_2 & +x_3 & & -2x_5 & -x_6 & & \\
& & 5x_2 & +50x_3 & +x_4 & +x_5 & & = & 10 \\
& x_1 & -15x_2 & +2x_3 & & & & = & 2 \\
& & x_2 & +x_3 & & +x_5 & +x_6 & = & 6 \\
& & & & & & x_i & \geq & 0 \quad \forall i = 1, \ldots, 6
\end{array}
$$

Utilizando el método **Simplex**.

Problema 11
(a) Resolver por el método simplex:

$$
\begin{array}{llllllll}
(P) \min & 3x_1 & +2x_2 & & & & \\
& -x_1 & +2x_2 & -x_3 & & = & -5/2 \\
& 2x_1 & +x_2 & & +x_4 & = & 3/2 \\
& & & & & x_i \geq 0 & \forall i = 1, \ldots, 4
\end{array}
$$

(b) Resolver gráficamente el problema (P), con la restricción adicional $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ y comentar.

Problema 12
Sean $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}^n$, $b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{R}$, dados. Probar que

$$(P) \quad \min \varphi(x) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

donde $\varphi(x) = \max\{c_1^T x + b_1, \ldots, c_k^T x + b_k\}$, es equivalente a un problema de programación lineal.

Problema 13
Demuestre que $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ es lineal afín $(f(x) = \alpha^T x + \beta)$ sí y sólo sí f es cóncava y convexa.

P.D. Esta guía ha sido confeccionada en su mayoría sacando ejercicios de pruebas de semestres anteriores, suerte ... (Ojo con la suerte pues son 13 problemas y tal vez sería mejor para su rendimiento que hicieran 13 veces los 13 ejercicios y así tener 13 veces más posibilidades de aprobar :))