Guía N^o 2 de Optimización MA37A/Prof: Jorge Amaya

Autor: José Saavedra (Charango)

Jueves 18 de Mayo del 2000

Problema 1

Parte (a): Pruebe que uno y sólo uno de los siguientes sistemas tiene solución:

1. $Ax \geq 0$, $x \geq 0$, $c^T x > 0$
2. $A^T y \geq c$, $y \leq 0$

Parte (b): Usando **(a)**, pruebe que el siguiente problema es no acotado

$$\begin{array}{lllllllll} \max & -x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +10x_4 & +6x_5 & & \\ & x_1 & -x_2 & +2x_3 & -18x_4 & -20x_5 & \geq & 1 \\ & x_1 & +2x_2 & -x_3 & +12x_4 & -20x_5 & \geq & -1 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

Problema 2

Sea:

$$\begin{array}{lllllll} (\mathcal{P}_\lambda): & z(\lambda) = & \min & (-20-40\lambda)x_1 & +(-30+30\lambda)x_2 & & \\ & & & 3x_1 & +3x_2 & \leq & 30 \\ & & & 8x_1 & +6x_2 & \leq & 80 \\ & & & 6x_1 & +x_2 & \leq & 45 \\ & & & x_1, & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

(a) Determine $z(\lambda)$, para $0 \leq \lambda \leq 20$ y grafíquela.

(b) Determine la solución óptima $(x_1(\lambda), x_2(\lambda))$ para $0 \leq \lambda \leq 20$.

(c) Determine el cuadro (simplex) óptimo (para $\lambda = 0$) y re-optimice agregando la restricción:

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

usando el algoritmo iterativo que corresponda.

Problema 3

Considere el problema

$$\begin{array}{llll} (P) & \min & c^T x & \\ & & Ax & = & b \\ & & x & \geq & 0 \end{array}$$

Usando **Farkas**, demuestre que:
(a) Si (P) es infactible y su dual admite una solución factible, entonces este último es no acotado.

(b) Si el dual de (P) es infactible y (P) admite una solución factible, entonces (P) es no acotado.

Problema 4
Considere los problemas

$$
\begin{array}{lll}
(P) \quad \min c^T x & \qquad\qquad & (D) \quad \max b^T y \\
\quad Ax = b & & \quad A^T y \leq c \\
\quad x \geq 0 & &
\end{array}
$$

sea $z(b) = \min\{c^T x / Ax = b, x \geq 0\}$ para b en el dominio en que ambos problemas tienen soluciones óptimas no degeneradas.

(a) Demuestre que $\nabla z(b) = \pi$, en que π es la solución óptima de (D).

(b) Sea $\Delta b \in I\!\!R^m$ una perturbación de b, suficientemente cercana a cero como para que la base óptima del problema (P) no cambie. Demuestre que si se elige

$$\Delta b_j > 0 \text{ para } \pi_j < 0$$

$$\Delta b_j < 0 \text{ para } \pi_j > 0$$

entonces $z(b + \Delta b) < z(b)$.

Problema 5
Escriba sin transformar los problemas el **problema dual de**:

(a)

$$
\begin{array}{llllllll}
(P) \min & 3x_1 & +2x_2 & -3x_3 & +4x_4 & & \\
 & x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +4x_4 & \leq & 3 \\
 & & x_2 & +3x_3 & +4x_4 & \geq & -5 \\
 & 2x_1 & -3x_2 & -7x_3 & -4x_4 & = & 2 \\
 & & & & x_1 & \geq & 0 \\
 & & & & x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

(b)

$$
\begin{array}{lllll}
(P) \max & 2x_1 & +x_2 & & \\
 & x_1 & +3x_2 & \leq & 3 \\
 & 6x_1 & -x_2 & = & 4 \\
 & x_1 & +2x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1, & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Problema 6
Demuestre, usando el **Teorema de Farkas**, que si el problema

$$\begin{array}{lrcl} (P) & \min c^t x & & \\ & s.a.\ Ax & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

es **no** acotado, entonces **no** existe $y \in I\!R^m$ tal que $A^t y \leq c$.

Problema 7
Examine la veracidad de la siguiente afirmación: Uno y sólo uno de los siguientes problemas tiene solución:

1. $Ax \geq 0$, $x \geq 0$, $c^T x > 0$
2. $A^T y \leq c$, $y \leq 0$

Problema 8
(a) Calcular el dual de los siguientes problemas primales:

1. $$\begin{array}{rcl} \min c^t x & & \\ s.a.\ Ax & = & b \\ k \leq x \leq h & & \end{array}$$

2. $$\begin{array}{rcl} \min c^t x & & \\ s.a.\ a^t x & = & b \\ x & \geq & 0 \end{array}$$

   con $a \in I\!R^n$, $b \in I\!R^+$, $c \geq 0$. Este es conocido como el **Problema de la Mochila**

(b) Resuelva 2 interpretando adecuadamente su dual.

Problema 9
Considere el problema

$$\begin{array}{rcl} \min c^t x & & \\ s.a.\ Ax & = & b \\ x & \geq & 0 \end{array}$$

y suponga que tanto el primal como el dual son factibles. Sea $\bar{y}$ una solución óptima conocida del dual.

(a) Si la k-ésima ecuación del primal es multiplicada por $\mu \neq 0$ encuentre una solución óptima $\vec{w}$ del nuevo dual.

(b) Suponga que en el primal le sumamos μ veces la k-ésima ecuación a la r-ésima ecuación. Encuantre w.

(c) Idem. si le agregamos μ veces la k-ésima fila de A a c.

Problema 10

Considere el par de problemas

$$\begin{array}{ccc} (P) \quad \min c^T x & \qquad & (D) \quad \max b^T y \\ Ax \geq b & & A^T y \leq c \\ x \geq 0 & & y \geq 0 \end{array}$$

(a) Si llamamos u al vector de variables de holgura de (P) y s al vector de variables de holgura de (D), demuestre que $(\bar{x}, \bar{u})$,$(\bar{y}, \bar{s})$ son óptimos respectivos de (P) y (D) si y sólo si:

$$\bar{x}_i \bar{s}_i = 0 \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$\bar{y}_j \bar{u}_j = 0 \qquad j = 1, \ldots, m$$

(b) Considere el problema (L):

$$\begin{array}{lllllllll} \max & y_1 & +2y_2 & +4y_3 & +y_4 & -y_5 & & & \\ & y_1 & +y_2 & +y_3 & +3y_4 & -y_5 & \leq & 35 & \\ & 2y_1 & +y_2 & & & +3y_5 & \leq & 1 & \\ & & & 2y_3 & & -2y_5 & \leq & 4 & \\ & 3y_1 & & & +y_4 & +y_5 & \leq & 3 & \\ & 2y_1 & -y_2 & +3y_3 & -y_4 & +y_5 & \leq & 3 & \\ & & & & & y_j & \geq & 0 & \forall j \end{array}$$

Determine si $y^T = (0, 1, 2, 3, 0)$ es solución óptima. En caso afirmativo, entregue una solución óptima del dual de (L).

Problema 11 (Repaso de conceptos)

Comente las siguientes afirmaciones: (En lo que sigue asumiremos A de $m \times n$, $x \in \mathbb{R}^n$)

- Si $Ax \leq b$ tiene solución, entonces $Ax = b$ también tiene solución.
- Si a es de $1 \times n$, $b \in \mathbb{R}$, entonces $ax \leq b$ siempre tiene solución.
- Si $r(A) < m$, A de $m \times n$, entonces toda solución básica de $Ax = b$ es degenerada.

- Si $n = m+1$, entonces $Ax = b$, $x \geq 0$ posee a lo mas dos soluciones básicas factibles.
- Si x y x' son dos soluciones básicas factibles definidas por las bases$B$ y B' de $Ax = b$, $x \geq 0$, tal que B y B' difieren en una sola columna, entonces el número de componentes no nulas comunes a x y x' es $m-1$.
- Si $Ax = b$ no tiene solución, para todo $b \neq 0$, entonces $A = 0$.
- Si $\bar{x}$ es solución básica factible, entonces $|\{j : \bar{x}_j > 0\}| \leq r(A)$. $(Ax = b, x \geq 0)$
- Si $\bar{x}$ es solución factible de $Ax = b$, $x \geq 0$, con m componentes positivas, entonces $\bar{x}$ es solución básica factible.
- Si $F = \{x : Ax \leq b\} \neq \emptyset$, entonces F admite solución básica factible.

Problema 12
Si $A = -A^T$, probar que existe $\bar{x}$ solución de $Ax \geq 0$, $x \geq 0$ que satisface $A\bar{x} + \bar{x} > 0$.

Problema 13
Sea $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $c = (1, 4)$. Determine cual de los siguientes sistemas tiene solución:

$$(S_1) : Ax \leq 0, cx > 0 \qquad (S_2) : y^T A = c^T, y \geq 0$$

P.D. Al igual que la vez anterior esta guía ha sido confeccionada en su mayoría sacando ejercicios de pruebas de semestres anteriores, suerte ...
Ojo: Si la vez anterior no me hicieron caso con la recomendación de los 13 y no les fué tan bien como esperaban para esta vez les diría que la guía la hagan 13^{13} *veces y así se sientan 13 veces más seguros de ustedes mismos y puedan aumentar su rendimiento en un 13% (A todo esto en Gringolandia los edificios no tienen piso 13, ¿Porqué será?, tal vez los construye uno que ya hizo optimización con Amaya y no quiere siquiera acordarse del bendito número 13) :)*