Guía N^o 3 de Optimización MA37A/Prof: Jorge Amaya

Autor: José Saavedra (Charango)

Jueves 15 de Junio del 2000

Problema 1 Una empresa de arriendo de autos, debe satisfacer la demanda de cuatro ciudades en un cierto día:

Ciudad	Autos demandados
A	2
B	3
C	5
D	7

La empresa tiene 3 garages donde guarda sus 18 autos:

Garage	Autos disponibles
1	6
2	2
3	10

Las distancias entre los garages y las ciudades están dadas por la tabla:

Gar.\Ciu.	A	B	C	D
1	7	11	3	2
2	1	6	0	1
3	9	15	8	5

Encuentre una asignación de los automóviles a las diferentes ciudades, de manera de minimizar la distancia total recorrida.

Problema 2

Un computador servidor (S) debe transferir 50 archivos a otro remoto (R), por medio de tres computadores intermedios (1), (2) y (3), cuyos costos de transmisión unitarios y capacidades máximas están dadas por la tabla siguiente:

Arco	(S,1)	(S,2)	(S,3)	(1,2)	(1,3)	(2,3)	(1,R)	(2,R)	(3,R)
Costo	1	2	3	5	1	6	8	5	4
Capac.	20	10	$+\infty$	10	50	50	$+\infty$	10	40

Plantee este problema como uno de programación lineal y resuélvalo por un algoritmo adecuado.

Problema 3

Considere tres centros de oferta de un cierto producto, con ofertas respectivas de 5, 25 y 25 unidades, y tres centros de demanda, con demandas 10, 20 y 15 respectivamente. Suponga que la matriz de costos unitarios es:

$$(c_{ij}) = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Plantee el problema como problema de transporte.
(b) Encuentre una solución básica factible.
(c) Encuentre una solución óptima y diga si es única.
(d) Si el costo c_{11} se modifica a 4 y el costo c_{13} se modifica a 10 (al mismo tiempo), encuentre una nueva solución óptima.

Problema 4

Suponga usted que juegan Colo-Colo y el grandioso equipo mágico **Universidad de Chile**. Como es inevitable en este tipo de compromisos, aparecen en el estadio los tipicos garreros, que como todo el mundo sabe (*Por lo menos quien escribe esto y su novia lo saben*) son delincuentes y lumpen por excelencia (Los de Abajo en el fondo son niños buenos). Dada esta situación de inminente peligro a su seguridad personal, los vecinos del estadio aterrorizados ante esta horda de delincuentes organizan un encuentro con Carabineros a quienes les plantean su problema: "Necesitamos seguridad para el día del encuentro". Carabineros de Chile entonces se ve enfrentado al problema siguiente:

Minimizar el número de policías a la salida del estadio, considerando que cada cuadra debe ser vigilada desde una esquina.

Para ello contratan los servicios de un profesor de optimización de cuyo nombre no me acuerdo ahora, pero de marcadas tendencias azules quien le entrega el problema a unos de sus ayudantes con nombre de instrumento musical y obsesión con el número trece (un romántico viajero también), el cual a su vez, confiando ciegamente en la pericia de los alumnos lo incluye en una guía de ejercicios propuestos. (Notar la coincidencia).

Indicación: Considerar el barrio aledaño al estadio como un grafo $(\mathcal{A}, \mathcal{N})$ en que los nodos son las esquinas y los arcos son las cuadras en cuestión. ¿Cómo cambia el modelo si las esquinas tienen costo es decir, hay que pagar c_i por poner un policía en un nodo i y el número de policías está limitado por L?

Nota: *Lo de carabineros es una historia falsa para hacer más entretenido el cuento, lo que no quiere decir que el problema ande alejado de la realidad. Este problema se puede complicar más aún si consideramos que aparte de simples carabineros podemos contar con otro tipo de artefactos tales como guanacos, zorrillos, cucas, etc (que naturalmente tienen coberturas y costos distintos).*

Problema 5
Uno o varios vendedores deben visitar n ciudades de manera de minimizar la distancia total recorrida. Cada vendedor debe partir de una ciudad (puede ser cualquiera) y regresar a ella al final del recorrido y visitar cada una sólo **una** vez.

Indicación: Para resolver este problema consideren el grafo en el que las ciudades son nodos y los caminos que unen las ciudades son los arcos (resuman todos los posibles caminos que unen directamente una ciudad con otra como un sólo arco, esto no implica que siempre exista un camino que una dos ciudades y en ocasiones para ir de una ciudad a otra deberán necesariamente pasar por otra intermedia). Además les convendría definir la variable:

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si nodo } j \text{ es siguiente de nodo } i \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Problema 6
Resuelva el problema, usando "Branch and Bound"(Ramificación y Acotamiento):

$$\begin{array}{lrrrrcl} \min & 3x_1 & +2x_2 & & & & \\ & x_1 & -2x_2 & +x_3 & & = & 5/2 \\ & 2x_1 & +x_2 & & +x_4 & = & 3/2 \\ & & & x_2, & x_3 & \in & \mathbb{Z} \\ & & & & x_i & \geq & 0 \end{array}$$

Problema 7
Para este problema necesitamos el algoritmo de Dijkstra para encontrar caminos más cortos:

Procedure Dijkstra
/* $d(e) \geq 0 \quad \forall e \in E$ */
$S := \{s\}$; $\mathcal{A}(s) := \varepsilon$; $\Pi(s) := 0$; $\Pi(x) := \infty \quad \forall x \neq s$
$x := s$
while $(\Pi(x) < +\infty)$ do

    for $e \in E$ tq $I(e) = x \quad T(e) \notin S$ do
    if $(\Pi(x) + d(e) < \Pi(T(e)))$ then
    $\Pi(T(e) := \Pi(x) + d(e))$
    $\mathcal{A}(T(e)) := e$
    escoger $x \notin S$ tal que $\Pi(x) := \min\{\Pi(y) : y \notin S\}$

$S := S \bigcup \{x\}$

(a) Para el grafo que se muestra a continuación encuentre el camino más corto desde L a A utilizando el algoritmo de Dijkstra. Indique la secuencia óptima de arcos y su longitud total.

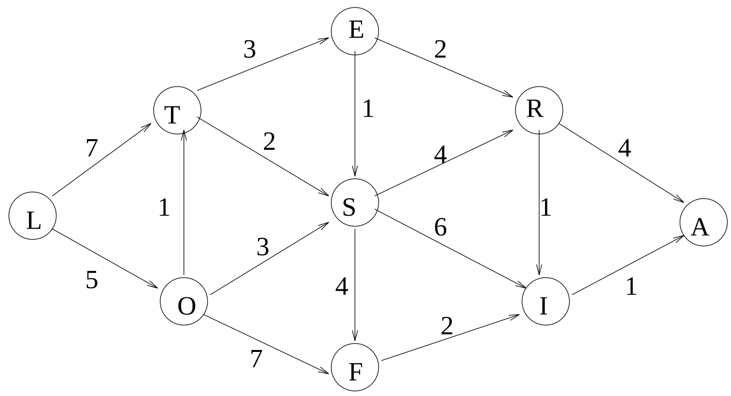

Figura 1: Grafo problema 7 parte (a)

(b) Plantee el mismo problema en forma de un problema de programación lineal canónico (**no** lo resuelva).
(c) Charango, como de costumbre, sale de su casa con α horas de retraso a una reunión de coordinación con el profesor Amaya. ¿Cómo podrían ustedes ayudar a Charango el perezoso a llegar a esta importante reunión a tiempo? Para ello ayúdese del grafo siguiente que indica los posibles caminos desde la casa de Charango a la Escuela.(¡De antemano muchas gracias!)
(**HINT:** Busque el camino más corto y analice los casos posibles según α)

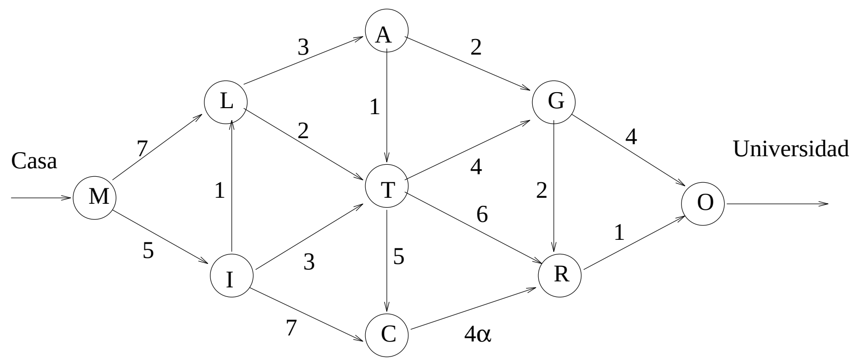

Figura 2: Grafo problema 7 parte (c)

Problema 8

(a) Plantee y resuelva el siguiente problema: se tiene 2 oferentes, con ofertas

$$a_1 = 20$$

$$a_2 = 25$$

y 3 demandantes, con demandas

$$b_1 = 7$$

$$b_2 = 23$$

$$b_3 = 12$$

Los costos de transporte están dados por la tabla siguiente:

	b_1	b_2	b_3
a_1	5	3	7
a_2	2	8	6

(b) Suponga ahora que existe un nodo de **transbordo** (es decir, no demanda ni ofrece), según el grafo (los costos, sobre los arcos)

Plantee este problema como problema de transporte (en forma canónica)

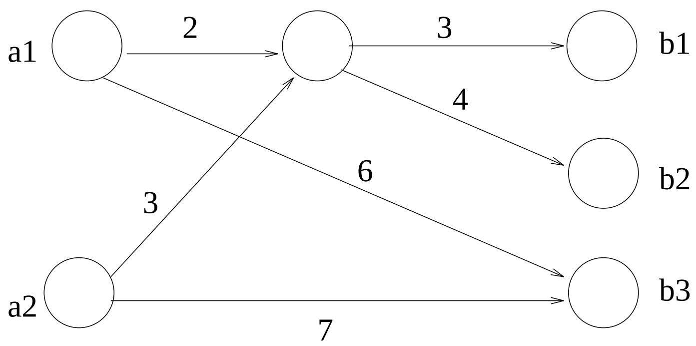

Figura 3: Grafo problema 8 parte (b)

Problema 9

Resuelva

$$
\begin{array}{lcccccc}
\min & 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & & \\
s.a. & & & & & \\
 & x_1 & +2x_2 & +x_3 & \leq & 3 \\
 & 2x_1 & +2x_2 & +2x_3 & \leq & 3 \\
 & x_1 & +2x_2 & +x_3 & \leq & 4 \\
 & & x_2, & x_3 & \in & \{0,1\}
\end{array}
$$

Problema 10
Resuelva el problema de transporte:
Además

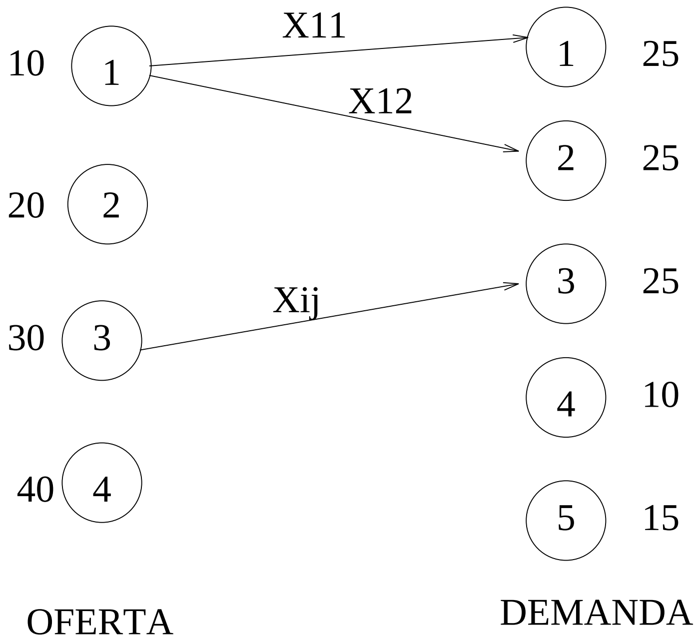

Figura 4: Grafo problema 10

$$1 \leq x_{11} \leq 5$$
$$1 \leq x_{22} \leq 10$$
$$1 \leq x_{33} \leq 20$$

En que los costos son:

$\frac{destino}{origen}$	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	6	7	8	9	0
3	1	2	3	4	5
4	6	7	8	9	0

(Noten que no es el típico problema de transporte visto en clases)

Problema 11
Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido con pesos $d_e \geq 0$ en los arcos $e \in E$. Sean $s, t \in V$ dos nodos fijos y denotemos mediante $\pi^s, \pi^t \in I\!R^{|V|}$ los potenciales de camino mínimo

π_i^s = longitud de un camino mínimo desde s hasta i,
π_i^t = longitud de un camino mínimo desde i hasta t.

(a) Proponga un algoritmo efieciente para calcular π^s y π^t
(b) Sea $e_0 \in E$ un arco dado. Probar que el camino más corto de s a t que utiliza el arco e_0 tiene longitud

$$L(e_0) := \pi^s_{I(e_0)} + d_{e_0} + \pi^t_{T(e_0)}$$

(c) Utilice lo anterior para construir un algoritmo que calcule simultáneamente el camino más corto de s a t.

Problema 12
El problema de flujo en red, con carga fija. Para este problema se considera el grafo $(\mathcal{A}, \mathcal{N})$. A cada nodo de este grafo se asigna b_i, de manera que si $b_i < 0$ entonces el nodo es de demanda, si $b_i > 0$ el nodo es de oferta y si finalmente $b_i = 0$, se dice que es de transición o de transbordo. Además se asume equilibrio en cada nodo, esto es,

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} b_i = 0$$

Por otra parte, se tiene que el arco (i,j) tiene capacidad u_{ij} y costo unitario h_{ij} y cuando usamos el arco (i,j) este tiene un costo fijo c_{ij} (solamente si se usa).
Se define la variable:

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si se usa el arco } (i,j) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Sea además y_{ij} el flujo en el arco (i,j). Lo que se pide en este problema es que plantee el modelo que permita minimizar el costo de transporte en este grafo respetando las restricciones que le son dadas.

Problema 13
Considere el problema

$$(P) \min f(x)$$

donde $f(x) = \frac{1}{2}x^T Q x + c^T x$, con Q definida positiva. Al cual se aplica el método del gradiente

$$x_{k+1} = x_k - t_k \nabla f(x_k)$$

con t_k tal que minimiza $f(x_k - t\nabla f(x_k))$, para $t \geq 0$.
Sea x^* tal que $Qx^* = -c$ y defina

$$E(x) = \frac{1}{2}(x - x^*)^T Q (x - x^*)$$

Esta función se llama "Error"(notar que x^* es el mínimo de f)
(a) Probar que $E(x) = f(x) + \mathcal{K}$ en que $\mathcal{K}$ es una constante (determinarla).

(b) Probar que

$$t_k = \frac{g_k^T g_k}{g_k^T Q g_k} \qquad \text{en que} \quad g_k = \nabla f(x_k)$$

(c) Probar que

$$E(x_{k+1}) = \left[1 - \frac{(g_k^T g_k)^2}{(g_k^T Q g_k)(g_k^T Q^{-1} g_k)}\right] E(x_k)$$

HINT: Calcular $\frac{E(x_k)-E(x_{k+1})}{E(x_k)}$

(d) *Lema de Kantorovich:* Si Q es simétrica, definida positiva, entonces $\forall x \in I\!R^n, x \neq 0$

$$\frac{(x^T x)^2}{(x^T Q x)(x^T Q^{-1} x)} \geq \frac{4aA}{(a+A)^2}$$

donde a y A son respectivamente el menor y el mayor valor propio de Q.
Usar este lema para probar que

$$E(x_{k+1}) \leq \left(\frac{A-a}{A+a}\right)^2 E(x_k)$$

(e) Probar que si $k \longrightarrow \infty$, entonces $x_k \longrightarrow x^*$.

Problema 14

Use el Teorema de **KKT** para determinar si los puntos $x = (2/3, 4/3, 1)^T$ y $x = (4/5, 6/5, 0)^T$ son o no soluciones del problema:

$$\begin{array}{lllll}
\min & -2x_1 & -6x_2 & +x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 & \\
 & x_1 & +x_2 & & \leq 2 \\
 & -x_1 & +2x_2 & & \leq 2 \\
 & & x_3 & & \leq 2
\end{array}$$

Problema 15

Sean $f : I\!R^n \to I\!R$, $g_i : I\!R^n \to I\!R \quad i = 1, \ldots, m$ convexas y diferenciables.
Considere el problema

$$\begin{array}{ll} (P) & \min f(x) \\ & g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \ldots, m \end{array}$$

y suponga que $S = \{x / g_i(x) < 0 \quad i = 1, \ldots, m\} \neq \emptyset$

(a) Demuestre que la región factible S es un conjunto convexo.

(b) Dado $\bar{x} \in S$, considere el problema:

$$(PQ) \quad \min \|\eta_0 \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \eta_i \nabla g_i(\bar{x})\|^2$$

$$s.a. \qquad \eta_0 + \sum_{i \in I} \eta_i = 1$$

$$\eta_0, \eta_i \geq 0 \quad i \in I$$

¿Qué tipo de problema es (PQ)?
Haciendo las hipótesis que considere útil, demuestre que si el valor óptimo de (PQ) es cero, entonces $\bar{x}$ es punto de **KKT** de (P).

Problema 16
Considere $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2$ y $(P)\min f(x)$
(a) Haga dos iteraciones del método **DFP** usando $x^0 = (0,0)^T$ como punto de partida.
(b) Considere

$$\begin{aligned} (P) \quad & \min f(x) \\ s.a. \quad & x_1 + x_2 = 3 \end{aligned}$$

Haga dos iteraciones del método de penalización (cuadrática), con parámetros $\mu = 0.1$ y $\mu = 1$, resolviendo P_μ análiticamente.
(c) Considere

$$\begin{aligned} (P) \quad & \min f(x) \\ s.a. \quad & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 + 10x_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Haga dos iteraciones del método de direcciones admisibles, partiendo de $x^0 = (0,0)^T$

Problema 17
Considere

$$\begin{aligned} (P) \quad & \min f(x) \\ & g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

Sea $\bar{x} \in I\!R$, factible y defina $I = \{i/g_i(\bar{x}) = 0\}$. Suponga que $f, g_i \in \mathcal{C}^\infty \quad \forall\rangle = \infty, \ldots, \Updownarrow$, g_i convexa $\quad \forall i = 1, \ldots, m$. Considere el problema auxiliar (que sirve para elegir dirección)

$$\begin{aligned} (PL) \quad & \min \nabla f(\bar{x})^T d \\ & \nabla g_i(\bar{x})^T d \leq 0 \quad i \in I \\ & -1 \leq d_j \leq 1 \quad j = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

Sea $\bar{d}$, solución de (PL) y $\bar{z} = \nabla f(\bar{x})^T \bar{d}$
(a) Demostrar que $\bar{z} \leq 0$
(b) Demostrar que si $\bar{z} < 0$ entonces existe $\eta > 0$ tal que

$$g_i(\bar{x} + \lambda \bar{d}) \leq 0 \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$f(\bar{x} + \lambda \bar{d}) < f(\bar{x})$$

Cumpliéndose estas últimas ecuaciones $\forall \lambda \in]0, \eta[$

(c) Demostrar que si $\bar{z} = 0$ entonces $\bar{x}$ satisface las condiciones de **KKT** para el problema (P)

Así como hubo superávit de agua en Santiago, esta guía se suma al esfuerzo superavitizador e incorpora en esta ocasión un superávit de problemas (4 en total). Eso no quiere decir que hayamos dejado el trece de lado. Finalmente vean la clase extra de Dijkstra que dejó el Pato en la primera fotocopiadora del CEI