Laboratorio n°2 : Alternativo
MA5302.- Laboratorio de Análisis Numérico de EDP

Profesores.- Pascal Frey, Axel Osses
Auxiliares.- Nicolás Carreño (ncarrenog@gmail.com), Cristóbal Quiñinao (toba@dim.uchile.cl)

Tema del Laboratorio : Diferencias Finitas en 2D

Descripción : El objetivo de esta segunda sesión es aprender a resolver EDP's en 2 dimensiones mediante el Método de las Diferencias Finitas. Específicamente se resolverá la ecuación de Poisson en un rectángulo unitario y en un dominio perforado; además se estudiará la aproximación para condiciones de borde en dominios con curvatura.

Parte A. Estudio de la Ecuación de Poisson

Ejercicio 1 Considere la Ecuación de Laplace $-\triangle u = 0$ en el dominio $\Omega = [0,1]\times[0,1]$ con las siguientes condiciones de borde :

$$\begin{aligned} u(0,y) = u(1,y) = 0, &\qquad 0 \leq y \leq 1 \\ u(x,0) = 0, &\qquad 0 \leq x \leq 1 \\ u(x,1) = g(x), &\qquad 0 \leq x \leq 1 \end{aligned} \tag{1}$$

donde $g \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$.

Demuestre que la ecuación anterior con las condiciones de borde 1 admite una solución. Para ello le puede ser útil la técnica de separación de variables.

Considere ahora la ecuación de Poisson en 2 dimensiones

$$(Poisson) \quad \begin{cases} -\triangle u(x,y) = f(x,y), & (x,y) \text{ en } \Omega \\ u(x,y) = g(x,y), & (x,y) \text{ en } \partial\Omega \end{cases}$$

por motivos de atingencia al presente laboratorio, el estudio de la existencia de solución y unicidad del problema de $(Poisson)$ lo dejaremos pendiente.

Parte B. Aproximación por Diferencias Finitas

Consideremos la ecuación $(Poisson)$ en el dominio $\Omega = [0,1]\times[0,1]$, sea la siguiente aproximación para el cuadrado unitario

$$\overline{\Omega}_h = \{(x_j, y_k), \quad 0 \leq j,k \leq N+1\}$$

tal que N define el espaciado $h = \frac{1}{N+1}$ y $x_j = jh$, $y_k = kh$. Se define el operador Laplaciano Discreto de 5-puntos por la expresión :

$$\triangle_h u_{j,k} = \frac{1}{h^2}(-4u_{j,k} + u_{j-1,k} + u_{j+1,k} + u_{j,k-1} + u_{j,k+1})$$

donde, como es usual, $u_{j,k} = u(x_j, y_k)$.

Ejercicio 2 Demuestre que si $u \in \mathcal{C}^4(\overline{\Omega})$ entonces

$$\|(\triangle u) - (\triangle_h u)\|_\infty \leq Ch^2$$

es decir, el operador $\triangle_h$ es consistente de segundo orden con respecto a $\triangle$.

Notemos ahora que dadas las condiciones de borde de tipo Dirichlet, las incógnitas del problema discreto son sólo los N^2 puntos internos. Si se enumeran dichos puntos de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba, entonces es posible listar sin ambigüedad los N^2 puntos antes mencionados mediante la regla :

$$(u_h)_n = u_h(x_j, x_k), \qquad n = (k-1)N + j, 1 \leq j, k \leq N.$$

El problema discreto, se reduce por consiguiente al sistema lineal

$$A_h u_h = b_h \tag{2}$$

donde :

$$A_h = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} L_4 & -I & 0 & \dots & & & 0 \\ -I & L_4 & -I & 0 & & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & 0 \\ & & & & -I & L_4 & -I \\ 0 & & & & 0 & -I & L_4 \end{pmatrix} \qquad \text{con } L_4 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & 4 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

con $L_4 \in \mathcal{M}_{N,N}(\mathbb{R})$ y

$$b_h = \begin{pmatrix} f_1 + \frac{1}{h^2}(g(1,0) + g(0,1)) \\ f_2 + \frac{1}{h^2}g(2,0) \\ \vdots \\ f_N + \frac{1}{h^2}(g(N,0) + g(N+1,1)) \\ f_{N+1} + \frac{1}{h^2}g(0,2) \\ f_{N+2} \\ \vdots \\ f_{2N} + \frac{1}{h^2}g(N+1,2) \\ f_{2N+1} + \frac{1}{h^2}g(0,3) \\ f_{2N+2} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3 Para $f(x,y) = 0$ y utilizando la condición de borde del tipo 1 con $g(x,1) = x(1-x)$

1. Escriba en `Matlab` una función que reciba como parámetro a N y entregue la matriz A_h ; y otra que su salida sea el vector b_h.
2. Resuelva la ecuación 2 para $N = 10, 20, 30$.

En lo que sigue haremos un estudio de dominios "curvos", consideremos el dominio de la Figura 1 y la discretización del dominio que queda definida por la malla esquematizada.

Queda claro que, en este caso, uno de los problemas fundamentales es definir los valores de $\triangle_h u$ en los puntos que quedan cercanos a la perforación circular. Para ejemplificar lo anterior consideremos el punto P, el cual tiene tres vecinos dentro del dominio N, W y E, pero S queda fuera de Ω y por consiguiente no es posible utilizar la fórmula de los cinco puntos pues aunque u_{xx} queda correctamente definido, u_{yy} utiliza S y por ende no se puede calcular.

Para resolver el problema planteado se propone el siguiente esquema : encontrar una combinación lineal de $u(x_N, y_N)$, $u(x_P, y_P)$ y $u(x_B, y_B)$ que aproxime correctamente a $u_{yy}(x_P, y_P)$ con un error de orden $O(h)$, esto es, encontrar α, β, γ tales que

$$\alpha u(x_N, y_N) + \beta u(x_P, y_P) + \gamma u(x_B, y_B) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + O(h) \tag{3}$$

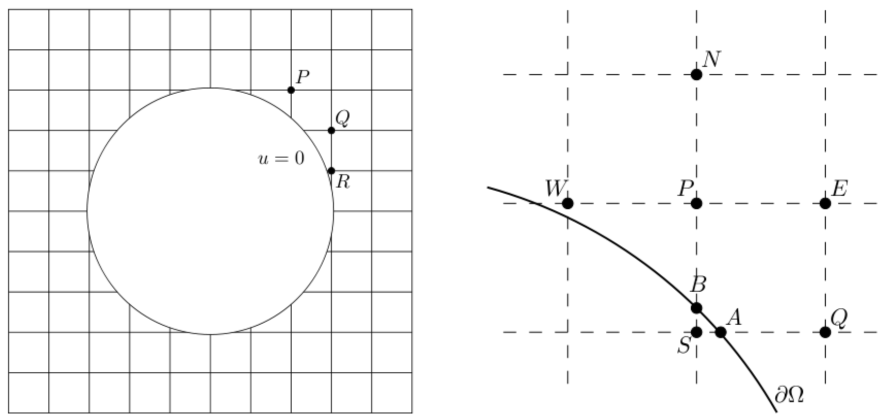

FIG. 1 – Problema de Frontera con una porción de $\partial\Omega$ curva.

Ejercicio 4 Demuestre que encontrar las incógnitas de la Ecuación 3 es equivalente a resolver el sistema

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha+\beta+\gamma=0\\ \alpha h-\gamma|y_B-y_P|=0\\ \alpha\frac{h^2}{2}+\gamma\frac{|y_B-y_P|^2}{2}=1\end{array}\right.$$

Ejercicio 5 Considere el problema de ($Poisson$) para $\Omega=[0,1]\times[0,1]\backslash B\left((0.5,0.5),0.3\right)$, $f(x,y)=0$ y g dada por la fórmula

$$g(x,y)=\left\{\begin{array}{ll}2 & \text{si } (x,y)\in\partial[0,1]\times[0,1]\\ 0 & \text{si } (x,y)\in\partial B\left((0.5,0.5),0.3\right)\end{array}\right.$$

1. Genere una función que reciba un punto de la malla (x_j,y_k) y entregue como resultado 1 si es un punto interior al cual se le puede calcular $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ con la aproximación utilizada en la fórmula de 5 puntos. Haga lo mismo para la derivada en la dirección y.
2. Considere que los puntos están enumerados de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba, asuma que la matriz del sistema es de la forma $A=A_x+A_y$, donde A_x tiene los coeficientes adecuados para la aproximación de la derivada parcial según x y lo equivalente para A_y. Encuentre la forma que deben tener A_x y A_y y escriba un programa en `Matlab` que calcule dichas matrices.
3. Escriba una función que calcule b_h del Problema Discreto 2 adaptado a este caso y resuelva el sistema para $N=10,20,30$.
4. <u>Bonus</u> *:* Haga lo mismo ahora para una función g que en el borde del disco tenga el valor 1.
5. <u>Bonus</u> *:* Diga el orden de convergencia de este modo de aproximar el problema de borde curvo. Proponga otro método, prográmelo y compare los resultados.