Laboratorio n°4 :
MA5302.- Laboratorio de Análisis Numérico de EDP

Profesores.- Pascal Frey, Axel Osses
Auxiliares.- Nicolás Carreño (ncarrenog@gmail.com), Cristóbal Quiñinao (toba@dim.uchile.cl)

Tema del Laboratorio : Método de Elementos Finitos

Descripción : En el presente laboratorio se pretende estudiar una Ecuación de Transporte y Difusión mediante el Método de Elementos Finitos.

Consideremos la ecuación del laboratorio anterior :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa(x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right) + \frac{\partial}{\partial x}(c(x)u(t,x)) = f(t,x) \tag{1}$$

donde $u(t,x)$ es una función escalar que representa la concentración de una especie química en una atmósfera que suponemos aquí unidimensional, $c(x) \geq 0$ representa la velocidad del viento y $\kappa(x) \geq \kappa_0 > 0$ es un coeficiente de mezcla turbulenta.

Parte 1 : Problema estacionario

Consideremos para esta sesión el problema estacionario asociado a (1) : Dado $f \in L^2(0,1)$, encontrar $u \in C^2(0,1)$ que resuelva :

$$\begin{cases} -(\kappa(x)u'(x))' + (c(x)u(x))' = f(x), \quad x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Ejercicio 1 (Formulación variacional) Consideremos $c(x) = c \geq 0$ y $\kappa(x) \in C^1([0,1])$ tal que $\kappa(x) \geq \kappa_0 > 0$.

1. Mostrar que la formulación variacional (o formulación débil) de (2) es : Encontrar $u \in H_0^1(0,1)$ tal que
$$\int_0^1 \kappa(x)u'(x)v'(x)\,dx - c\int_0^1 u(x)v'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx \quad \forall v \in H_0^1(0,1) \tag{3}$$
2. Demuestre que existe una única solución al problema (3).

Ejercicio 2 (Discretización por elementos finitos) Por simplicidad, en lo que sigue considere $\kappa(x) = \kappa$ constante. Introducimos una discretización del dominio $[0,1]$. Para $N \in \mathbb{N}$, sea $h = 1/(N+1)$ y consideremos una malla uniforme definida por los puntos $x_k = j\,h$, $0 \leq j \leq N+1$ y los intervalos $K_j = [x_j, x_{j+1}]$, $0 \leq j \leq N$. Sea $\mathbb{P}_1$ el conjunto de las funciones afines globalmente continuas en $[0,1]$ e introducimos el espacio V_h^1 de las funciones continuas en cada intervalo :

$$V_h^1 = \{v_h \in C^0([0,1]),\, v|_{K_j} \in \mathbb{P}_1,\, 0 \leq j \leq N\},$$

y el subespacio de V_h^1 :

$$V_{h,0}^1 = \{v_h \in V_h^1 : v_h(0) = v_h(1) = 0\}.$$

1. Considere las funciones de la forma $(\varphi_j)_{1\leq j\leq N}$ tal que :

$$\varphi_j \in V^1_{h,0} \quad \text{y} \quad \varphi_j(x_i) = \delta_{ij},\, \forall i \in \{1,\ldots,N\}$$

   Muestre que las funciones $(\varphi_j)_{1\leq j\leq N}$ forman una base de $V^1_{h,0}$.

2. Se desea encontrar un aproximación $u_h \in V^1_{h,0}$ de la función desconocida u, solución del siguiente problema variacional : Encontrar $u_h \in V^1_{h,0}$ tal que

$$\kappa \int_0^1 u_h'(x)v_h'(x)\,dx - c\int_0^1 u_h(x)v_h'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v_h(x)\,dx \quad \forall v_h \in V^1_{h,0}. \tag{4}$$

   Muestre que $u_h(x_j) = \alpha_j$, donde α_j es la $j-$ésima componente de u_h en la base $(\varphi_j)_{1\leq j\leq N}$.

3. Considere el vector $U_h = (u_h(x_1),\ldots,u_h(x_N))^t \in \mathbb{R}^N$. Mostrar que U_h es la solución del sistema lineal

$$A_h U_h = F_h$$

   e indicar cuáles son los coeficientes de la matriz $A_h \in \mathbb{R}^{N,N}$ y del lado derecho $F_h \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

4. Calcule explícitamente los coeficientes de la matriz $A_h \in \mathbb{R}^{N,N}$.

5. Muestre que la matriz A_h es invertible.

Ejercicio 3 (Solución numérica)

1. Escriba una función

```
function A=CalculaMatA(N)
```

   para calcular los coeficientes de la matriz A_h.

2. Escriba una función para construir el lado derecho F_h :

```
function b=CalculaRHS(N,f)
```

   donde los argumentos de entrada son N y la función f. Use una fórmula de integración para aproximar las integrales del tipo

$$\int_a^b g(x)\,dx.$$

3. Calcule la solución aproximada u_h del problema (4) para $f = 1$ y para los valores $N = 10$ y $N = 20$.