Laboratorio n°5 :
MA5302.- Laboratorio de Análisis Numérico de EDP

Profesores.- Pascal Frey, Axel Osses
Auxiliares.- Nicolás Carreño (ncarrenog@gmail.com), Cristóbal Quiñinao (toba@dim.uchile.cl)

Tema del Laboratorio : Método de Elementos Finitos

Descripción : Continuaremos el trabajo del laboratorio anterior viendo cambios en las condiciones de borde y resolviendo el problema de evolución original.

Parte 2 : Problema estacionario con condiciones de borde mixtas

El problema de condiciones de borde mixtas es : Dado $f \in L^2(0,1)$, encontrar $u \in C^2(0,1)$ que resuelva

$$\begin{cases} -(\kappa(x)u'(x))' + (c(x)u(x))' = f(x), & x \in (0,1) \\ u(0) = 0 \\ u'(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Ejercicio 1 (Formulación variacional) Consideremos $c(x) = c \geq 0$ y $\kappa(x) = \kappa > 0$.

1. Mostrar que la formulación variacional (o formulación débil) de (1) es : Encontrar $u \in H^1(0,1)$ tal que

$$\kappa \int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx - c\int_0^1 u(x)v'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx - \kappa u'(0)v(0) - cu(1)v(1) \quad \forall v \in H^1(0,1) \tag{2}$$

Ejercicio 2 (Discretización por elementos finitos) Recordemos la notación de la discretización del dominio $[0,1]$. Para $N \in \mathbb{N}$, sea $h = 1/(N+1)$ y consideremos una malla uniforme definida por los puntos $x_k = j\,h$, $0 \leq j \leq N+1$ y los intervalos $K_j = [x_j, x_{j+1}]$, $0 \leq j \leq N$. Sea $\mathbb{P}_1$ el conjunto de las funciones afines globalmente continuas en $[0,1]$ e introducimos el espacio V_h^1 de las funciones continuas en cada intervalo :

$$V_h^1 = \{v_h \in C^0([0,1]),\, v|_{K_j} \in \mathbb{P}_1,\, 0 \leq j \leq N\}.$$

1. Proponga una base para el espacio V_h^1. Debe demostrar que es base.
2. Se desea encontrar un aproximación $u_h \in V_h^1$ de la función desconocida u. Demuestre que la formulación variacional del problema de aproximación interna es : Encontrar $u_h \in V_h^1$ tal que

$$\kappa \int_0^1 u_h'(x)v_h'(x)\,dx - c\int_0^1 u_h(x)v_h'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v_h(x)\,dx - \kappa u_h'(0)v_h(0) - cu_h(1)v(1) \quad \forall v_h \in V_h^1. \tag{3}$$

3. Considere el vector $U_h = (u_h(x_0), \ldots, u_h(x_{N+1}))^t \in \mathbb{R}^{N+2}$. Mostrar que U_h es la solución del sistema lineal

$$A_h U_h = F_h$$

e indicar cuáles son los coeficientes de la matriz $A_h \in \mathbb{R}^{N+2,N+2}$ y del lado derecho $F_h \in \mathbb{R}^{N+2}$.

4. Calcule explícitamente los coeficientes de la matriz $A_h \in \mathbb{R}^{N+2,N+2}$.

5. Muestre que la matriz A_h es invertible.

Ejercicio 3 (Solución numérica)

1. Escriba una función

```
function A=CalculaMatA2(N)
```

para calcular los coeficientes de la matriz A_h.

Indicación : Puede usar el trabajo ya hecho en la sesión anterior para constriur esta función.

2. Escriba una función para construir el lado derecho F_h :

```
function b=CalculaRHS2(N,f)
```

donde los argumentos de entrada son N y la función f. Use una fórmula de integración para aproximar las integrales del tipo

$$\int_a^b g(x)\,dx.$$

Indicación : Puede usar el trabajo ya hecho en la sesión anterior para constriur esta función.

3. Calcule la solución aproximada u_h del problema (3) para $f = 1$ y para los valores $N = 10$ y $N = 20$.

Parte 3 : Problema de evolución

Volvamos al problema de evolución original :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\kappa(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right) + \dfrac{\partial}{\partial x}(c(x)u(t,x)) = f(t,x) \quad t \in (0,T), x \in (0,1) \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 \quad t \in (0,T) \\ u(0,x) = u^0(x) \quad x \in (0,1) \end{cases} \tag{4}$$

Ejercicio 4 (Una solución analítica pseudo-exacta) Consideremos la función

$$u(t,x) = \exp(-L(t+t_0)(x-x_0)^2)$$

con las contantes $L = 1000$, $t_0 = 0,1$ y $x_0 = 0,5$ escogidas de manera que $u(t,x)$ sea casi nula en la frontera del dominio espacial durante el tiempo de simulación $T = 1$.

1. Calcule la función $f(t,x)$ correspondiente a esta solución $u(t,x)$.
2. Escriba una función

```
function ue=SolExa(t,x)
```

para calcular la solución pseudo-exacta $u(t,x)$.

3. Escriba una función

```
function f=CalculaRHS(t,x)
```

para calcular el lado derecho correspondiente.

La idea ahora es aproximar la solución por elementos finitos en espacio y diferencias finitas en tiempo. Definamos el paso del tiempo $\Delta t = T/M$, $M \in \mathbb{N}$ y la discretización $t_n = n\Delta t$, $n = 1,\ldots,M$. Se propone el siguiente esquema : Sea $\theta \in [0,1]$, encontrar $u_h^n \in V_{h,0}^1$, $1 \leq n \leq M$, tal que, para todo $1 \leq n \leq M$ y para todo $v_h \in V_{h,0}^1$ se cumpla

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle \frac{1}{\Delta t} \int_0^1 (u_h^n(x) - u_h^{n-1}(x)) v_h(x)\, dx + \kappa \int_0^1 ((1-\theta) u_h^n(x) + \theta u_h^{n-1}(x))' v_h'(x)\, dx \\ \displaystyle - c \int_0^1 ((1-\theta) u_h^n(x) + \theta u_h^{n-1}(x)) v_h'(x)\, dx = \int_0^1 ((1-\theta) f^n(x) + \theta f^{n-1}(x)) v_h(x)\, dx \end{array} \right. \tag{5}$$

donde

$$f^n(x) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(t,x)\, dt$$

y

$$u_h^0 = I_h(u_0).$$

I_h es el operador de interpolación en $V_{h,0}^1$ definido por :

$$(I_h(v))(x_k) = v(x_k),\ 1 \leq k \leq N.$$

Ejercicio 5 Para $\theta = 1/2$ se obtiene el esquema de *Crank-Nicolson* ¿Qué esquemas se obtienen para $\theta = 0$ y $\theta = 1$?

Ejercicio 6

1. Mostrar que $U_h^n = (u_h^n(x_1), \ldots, u_h^n(x_n))^t$ es solución de un sistema lineal de la forma :

$$\left(\frac{1}{\Delta t} B_h + (1-\theta)(\kappa C_h - c D_h) \right) U_h^n = \left(\frac{1}{\Delta t} B_h - \theta(\kappa C_h - c D_h) \right) U_h^{n-1} + (1-\theta) F_h^n + \theta F_h^{n-1}$$

   explicitando las matrices B_h, C_h, D_h y los vectores F_h^n y F_h^{n-1}.
2. Implemente este algoritmo para $\theta = 0, 1$ y $1/2$.
3. Estudie la influencia del parámetro de discretización temporal Δt sobre la precisión del algoritmo para $\theta = 0, 1$ y $1/2$. Tomar $M = 2^j$, $j = 1, \ldots, 6$ y observar solamente la solución final, es decir, visualizar en un gráfico log-log, $\|u_h(1,\cdot) - u(1,\cdot)\|_0$ en función de M para N fijo ($N = 2^8$, por ejemplo). Comente.
4. Repita lo anterior experimentando para distintos valores de N. Comente.