Laboratorio n°6 :
MA5302.- Laboratorio de Análisis Numérico de EDP

Profesores.- Pascal Frey, Axel Osses
Auxiliares.- Nicolás Carreño (ncarrenog@gmail.com), Cristóbal Quiñinao (toba@dim.uchile.cl)

Tema del Laboratorio : Método de Elementos Finitos en 2d

Descripción : Se usará el método de los elementos finitos para resolver el problema en malla no estructurada con rutinas MATLAB. Se utilizarán 2-simplex de tipo 1. Para ello se proveen también rutinas que resuelven el problema $-\Delta u + u = f$ con condiciones de borde tipo Dirichlet o Neumann homogéneas, en un dominio correspondiente a la cuarta parte de un círculo.

Parte 1 : Formulación Teórica del Problema

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto acotado no vacío de frontera lipschitziana y $\Omega_2 = B_r(x_0, y_0)$ la bola abierta de centro (x_0, y_0) y radio $r > 0$ tal que $\overline{\Omega}_2 \subset \Omega$ definimos $\Omega_1 = \Omega \setminus \overline{\Omega}_2$, $\Gamma = \partial\Omega$ y $\gamma = \partial\Omega_2$. Sea además n la normal unitaria exterior a Ω_1.

Dado $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, considere los tres problemas elípticos siguientes :

(a) Para $a_1 \in L^\infty(\Omega_1)$, $a_1(x,y) \geq \alpha_0 > 0$, c.t.p. $(x,y) \in \Omega_1$:

$$(P_a) \begin{cases} -\mathrm{div}(a_1(x,y)\nabla u) = 0 & \text{en } \Omega_1 \\ u = g & \text{sobre } \Gamma \\ u = 0 & \text{sobre } \gamma \end{cases} \tag{1}$$

(b) Para $a_1 \in L^\infty(\Omega_1)$, $a_1(x,y) \geq \alpha_0 > 0$, c.t.p. $(x,y) \in \Omega_1$:

$$(P_b) \begin{cases} -\mathrm{div}(a_1(x,y)\nabla u) = 0 & \text{en } \Omega_1 \\ u = g & \text{sobre } \Gamma \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \gamma \end{cases} \tag{2}$$

(c) Para $a_i \in L^\infty(\Omega_i)$, $a_i(x,y) \geq \alpha_0 > 0$ c.t.p. $(x,y) \in \Omega_i$, $i = 1, 2$

$$(P_c) \begin{cases} -\mathrm{div}(a_1(x,y)\nabla u) = 0 & \text{en } \Omega_1 \\ u = g & \text{sobre } \Gamma \\ -\mathrm{div}(a_2(x,y)\nabla v) = 0 & \text{en } \Omega_2 \\ u = v & \text{sobre } \gamma \\ a_1\frac{\partial u}{\partial n} = a_2\frac{\partial v}{\partial n} & \text{sobre } \gamma \end{cases} \tag{3}$$

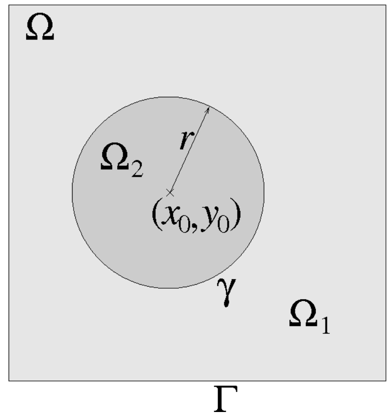
Ejercicio 1

(i) Encuentre una formulación variacional para los problemas (P_a) y (P_b) en un espacio funcional adecuado y estudie la existencia, unicidad y continuidad de la solución con respecto a los datos en ese espacio.

(ii) Para (P_c), demostrar que es equivalente considerar una función w definida en *todo* Ω tal que :

$$(P) \begin{cases} -\mathrm{div}(a(x,y)\nabla w) = 0 & \text{en } \Omega \\ w = g & \text{sobre } \Gamma \end{cases}$$

donde $a \in L^\infty(\Omega)$ se debe escoger adecuadamente.



(iii) El problema (P_c) es llamado un problema de transmisión. ¿Se pueden considerar (P_a) o (P_b) como casos límites de (P_c) para a_2 convergiendo a infinito o a cero ?

Parte 2 : Resolución Numérica y Aplicación

Considere $\Omega = (-1,1) \times (-1,1)$, Ω_1 y Ω_2 definidos como en **(i)** (ver figura). Para este dominio (que deberá depender de los parámetros r y de (x_0, y_0)) resolveremos una serie de problemas numéricos que se detallan a continuación :

Ejercicio 2

(iv) Generar una parametrización convenientemente orientada de los bordes que definen $\Omega, \Omega_1, \Omega_2$ (ver rutina `geometria.m`) y a partir de ellas las mallas necesarias (ver rutina `crea_malla.m`), donde cada elemento incluya una referencia al subdominio correspondiente Ω_1 u Ω_2 al que pertenezca.

(v) Utilizando 2-simplex de tipo 1 y modificando convenientemente la rutina principal `laplaciano.m` y las otras rutinas secundarias, resuelva numéricamente los problemas (P_a), (P_b) y (P_c) en dominios del tipo de la figura. Considere que g, a_1 y a_2 (además de $((x_0, y_0)$ y $r)$ son parámetros. Para simplificar a_1 y a_2 se tomarán constantes.

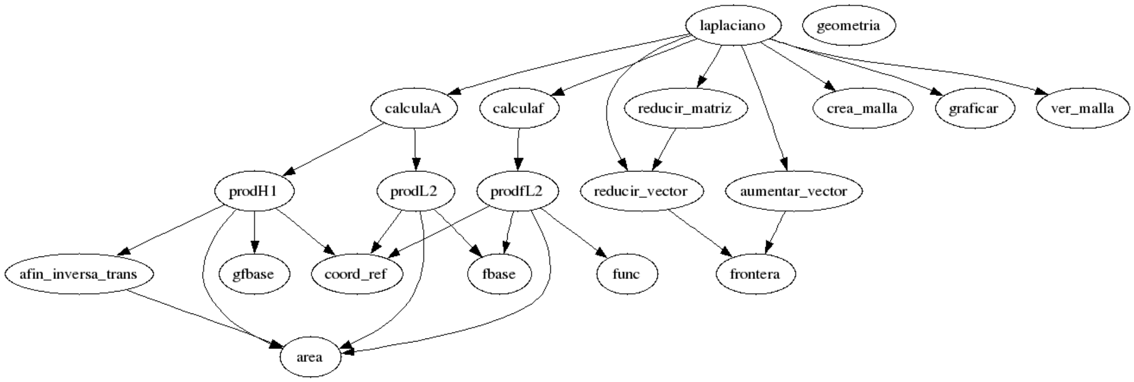
(vi) Estudie numéricamente qué pasa cuando a_2 tiende a cero o a infinito. ¿Se cumple lo que usted dijo en **(iii)** ?

(vii) Estime a partir de ensayos numéricos el centro (x_0, y_0) y el radio r de la bola Ω_2 conociendo g, a_1, (a_2 en (P_c)) y midiendo $\frac{\partial u}{\partial n}$ en Γ, esto es, conociendo el operador Dirichlet-Neumann $\Lambda : H^{1/2}(\Gamma) \to H^{-1/2}(\Gamma)$, $\Lambda g = \frac{\partial u}{\partial n}$?

Anexo 1 : Descripción del paquete de programas básico

A continuación se enumera cada una de las rutinas que se dan como base para las Tareas propuestas y su funci'on específica.

- Rutina principal :
  - `laplaciano.m` : Rutina principal que integra las demás. Primero se malla un dominio y se resuelve con 2-simplex de tipo 1 el problema $-\Delta u + u = f$ con condiciones de borde de tipo Dirichlet o Neumann homogéneas en ese dominio. Recibe como parámetro un número de refinamiento (0, 1 ó 2 según el refinamiento de la malla deseado) y un string para el tipo de condición de borde. Ejemplo : `sol=laplaciano(1,'dirichlet')`.
- Rutinas de mallado :
  - `geometria.m` : Define la geometría del dominio a mallar, mediante definición paramétrica de cada uno de los bordes.
  - `crea_malla.m` : Genera la malla del dominio, de acuerdo al número de refinamiento deseado y a la geometría definida en el archivo `geometria.m`. Retorna una matriz de vértices `v` y una matriz de triángulos `t`, con el formato siguiente :
    - Matriz de vértices `v`. La i-ésima fila contiene la información del vértice i : En las columnas 1 y 2 están sus coordenadas x e y, en la columna 3 hay un número que determina si pertenece al interior o al borde : 0 si pertenece al interior y 1, 2,... si pertenece a alguno de los bordes.
    - Matriz de triángulos `t`. La k-ésima fila contiene la información del triángulo k : En las columnas 1, 2 y 3 están los números de sus tres vértices.
- Rutinas básicas de MEF :
  - `calculaf.m` y `calculaA.m` : Calculan el lado derecho y la matriz del sistema lineal asociado a la formulación variacional discretizada. Notar que la matriz se ensambla recorriendo sobre los elementos y no sobre los nodos de la malla.
  - `prodfL2.m`, `prodL2.m` y `prodH1.m` : Calculan el producto L^2 entre la función f del lado derecho y la función de base, el producto L^2 entre funciones de base y el semiproducto H^1 entre funciones de base, en un 2-simplex dado.
  - `func.m` : Evalúa la función f del lado derecho en un pto. de un 2-simplex dado.
  - `fbase.m` y `gfbase.m` : Evalúan una función de base y el gradiente de una función de base en el 2-simplex de referencia.
  - `afin_inversa_trans.m` : Calcula la inversa de la traspuesta de la matriz de la transformacion afín que lleva del 2-simplex de referencia a otro 2 simplex dado.
  - `area.m` : Calcula el 'area de un 2-simplex dado.
  - `coord_ref` : Retorna las coordenadas de los vértices y puntos medios del 2-simplex de referencia.
  - `reducir_vector.m`, `aumentar_vector.m` : Elimina o agrega (como ceros) a un vector dado las entradas asociadas a vértices del borde cuya referencia corresponde a una condición de borde es de tipo Dirichlet homogénea.
  - `reducir_matriz.m` : Elimina de una matriz cuadrada dada (de tamaño igual al número de vértices) las filas y columnas asociadas a vértices del borde, cuando la condición de borde es de tipo Dirichlet homogénea.
  - `frontera.m` : Retorna 1 si un vértice dado pertenece al borde y la condición de borde es de Dirichlet homogénea, retorna 0 en cualquier otro caso, por ejemplo si la condición es de tipo Neumann homogénea.
- Rutinas de visualización :
  - `ver_malla.m` : Permite visualizar la malla.
  - `graficar.m` : Muestra los resultados, tanto el gráfico de la superficie en 3D como las curvas de nivel.



Nota : los programas tienen un fin docente y no se encuentran optimizados aprovechando todas las posibilidades de cálculo vectorial de MATLAB. Esto con el fin de darles más claridad. Por ejemplo, la rutina `reducir_vector.m` puede optimizarse bastante.