MA5702 Laboratorio de Control Óptimo. Semestre 2009-2
Profesor: Héctor Ramírez C. **Auxiliares:** Julio Backhoff, Oscar Peredo.

Laboratorio #2

14 de Agosto del 2009

Descripción: El objetivo de este laboratorio es determinar la controlabilidad y observabilidad de un sistema lineal controlado. Para esto, se pide verificar los respectivos criterios de manera directa y usando el Toolbox de Control de MATLAB. También se estudian conceptos relacionados como la matriz Gramiana y la forma canónica de Brunovski.

Parte A. Modelamiento

Ejercicio 1 Un barco carguero debe llevar su cargamento desde el puerto de San Antonio en Chile hasta el puerto de Guangzhou ubicado en el sur de China, atravesando el Océano Pacífico. El objetivo de este primer ejercicio es modelar el movimiento del barco como un sistema no-lineal no autónomo:

$$\vec{X}'(t) = F(t, \vec{X}(t)), \qquad t \geq 0. \tag{1}$$

Para esto, asuma lo siguiente:

- Se conoce $(x(t), y(t))$ es el vector (abscisa,ordenada) que indica la posición del barco en el oceano en un tiempo t.
- El barco se mueve con rapidez constante igual a V.
- El mar posee corrientes marinas que dependen sólo de la posición del barco $(x(t), y(t))$ y que influyen en su movimiento actuando como una fuerza externa, denotada por $\vec{G}(x, y) = (G_1(x, y), G_2(x, y))^\top$.
- La masa del barco disminuye a medida que este consume combustible. Por simplicidad, se supone que esta disminución de masa es conocida y depende sólo del tiempo t, obteniendo así una función denotada $m(t)$.
- Los efectos del roce o viscosidad son despreciables.

Para realizar el modelamiento, realice los siguientes pasos:

(a) Denotemos por $\nu(t)$ el ángulo de inclinación del vector velocidad $\vec{V(t)} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))^\top$ del barco, con respecto al eje de las abscisas. Demuestre que:

$$\frac{dx}{dt}(t) = V\cos(\nu(t)), \tag{2}$$

$$\frac{dy}{dt}(t) = V\sin(\nu(t)). \tag{3}$$

(b) A partir de la segunda ley de Newton $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}}$, donde $\vec{P(t)} = m(t)\vec{V}(t)$ es el momentum del barco y $\vec{F}_{\text{ext}}(t)$ corresponde a las fuerzas externas que actúan sobre el (en este caso, las corrientes marinas), escriba un modelo de la forma (1), donde el lado derecho viene dado (salvo reordenamiento de las variables) por

$$F(t, \vec{X}) = \tilde{A}(t)\vec{X} + \tilde{G}(\vec{X})$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\dot{m}(t)}{m(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\dot{m}(t)}{m(t)} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \tilde{G}(\vec{X}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{G_1(x_1,x_3)}{m(t)} \\ 0 \\ \frac{G_2(x_1,x_3)}{m(t)} \end{pmatrix}.$$

Identifique cada componente de $\vec{X}$.

Indicación: Utilice (2) y (3) para eliminar la dependencia de la variable $\nu(t)$.

Ejercicio 2 Por simplicidad, suponga que las corrientes marinas vienen dadas por una función G lineal. En este caso estas corrientes se ven como giros, tal como se aprecia en la Figura 1.

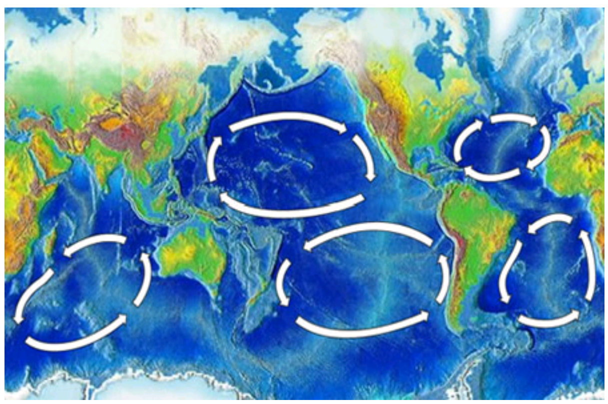

Figura 1: Corrientes marinas: G lineal

Utilice el applet `pplane` desde el sitio `http://math.rice.edu/∼dfield/dfpp.html` para dibujar los diagramas de fase que representan estas corrientes:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ax(t) + by(t), \\ \dot{y}(t) &= cx(t) + dy(t), \end{aligned}$$

con las siguientes configuraciones paramétricas: $a = -1$, $b = -2$, $c = 4$, $d = -5$ y $a = -1$, $b = 0$, $c = 4$, $d = -1$. Reescriba un modelo de la forma (1) pero donde el lado derecho ahora es una función lineal no homogénea $F(t, \vec{X}) = \tilde{A}(t)\vec{X}$.

Ejercicio 3 Para maniobrar el barco se introduce un motor que puede ejecutar movimientos en el eje de las abscisas (Este u Oeste) y en el eje de las ordenadas (Norte o Sur). La fuerza ejercida por este motor es representada por el control $\vec{U}(t) = (u(t), v(t))$. A partir del modelo del ejercicio 2, describa el movimiento del barco como un sistema lineal (no homogéneo) controlado de la forma $\vec{X}'(t) = \tilde{A}(t)\vec{X}(t) + B\vec{U}(t)$.

Ejercicio 4 Suponga que la evolución de la masa viene dada por la fórmula $m(t) = m_0 + (1+t)^{-1}$. Calcular la matriz Grammiana $\mathcal{C}(t)$ de los sistemas obtenidos en el ejercicio 3. Verificar si el sistema es controlable en un tiempo T.

Ejercicio 5 En el resto de las preguntas supondremos que la masa es costante, es decir, $m(t) = m > 0$ para todo $t \geq 0$. Utilizando `matlab` (sin el toolbox de Control), calcule la matríz de controlabilidad $\mathcal{C} = [B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B]$, con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, para los distintos valores a, b, c y d del ejercicio 2.

Ejercicio 6 Utilizando el toolbox de Control de `matlab`, calcule la matríz de controlabilidad $\mathcal{C}$. Estudie el comando `ctrb`. Compare el resultado con el obtenido en el ejercicio 5.

Ejercicio 7 Suponga ahora que podemos observar la evolución del sistema según el modelo $\vec{Y} = C\vec{X} + D\vec{U}$, con C y D matrices de la forma:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Con lo anterior, nuestro sistema queda de la forma:

$$\vec{X}' = A\vec{X} + B\vec{U} \tag{4}$$
$$\vec{Y} = C\vec{X} + D\vec{U} \tag{5}$$

Utilizando `matlab` (sin el toolbox de Control), calcule la matríz de observabilidad $\mathcal{O} = [C; CA; CA^2; \ldots; CA^{n-1}]$, con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $C \in \mathbb{R}^{q\times n}$, para los sistemas de los ejercicios precedentes.

Ejercicio 8 Utilizando el toolbox de Control de `matlab`, calcule la matríz de observabilidad $\mathcal{O}$.Estudie el comando `obsv`. Compare el resultado con el obtenido en el ejercicio 7.

Ejercicio 9 Utilizando el comando `gram` calcule el Grammiano para los sistemas de los ejercicios precedentes. Para esto, previamente debe definir un sistema en el espacio de estados con el comando `ss`:

```
>> S=ss(A,B,C,D)
```

Luego, para obtener el grammiano asociado a la controlabilidad debe ejecutar:

```
>> Wc=gram(S,'c')
```

y para el asociado a la observabilidad debe ejecutar:

```
>> Wo=gram(S,'o')
```

Explique porqué el comando arroja un error.

Utilice el comando `stabsep` para separar los distintos sistemas del ejercicio 2 en una parte estable (donde $\text{Re}(\text{eig}(A)) < 0$) y una inestable. El comando se utiliza de la siguiente manera (revise `help stabsep`):

```
[Sest,Snoest]=stabsep(S,'AbsTol',1e-5,'Offset',0.1)
```

Aplique el comando `gram` a la parte estable obtenida con `stabsep`, para obtener el grammiano asociado a la controlabilidad y observabilidad de la parte estable. Comente los resultados.

Ejercicio 10 Suponga ahora que la fuerza del motor solo puede tomar valores acotados entre valores -1 y 1 en cada dirección. Verifique si los sistemas del ejercicio 2 es controlable son controlables a 0.

Ejercicio 11 Demuestre que si los parámetros a, b, c y d satisfacen la relación $(a - d)^2 = 4bc$, entonces el sistema controlado del ejercicio precedente es controlable a 0.

Ejercicio 12 Suponga ahora que el barco solamente cuenta con un motor que permite movimientos en las direcciones Norte-Este y Sur-Oeste. Reformule el sistema del ejercicio 3. Estudie la controlabilidad y observabilidad de estos nuevos sistemas (para los distintos valores de los parámetros a, b, c y d dados en el ejercicio 2).

Ejercicio 13 A partir de lo aprendido en clases, calcule la forma canónica de Brunovski de los sistemas del ejercicio precedente (sin utilizar el toolbox de Control).