MA5702 Laboratorio de Control Óptimo. Semestre 2009-2
Profesor: Héctor Ramírez C. **Auxiliares:** Julio Backhoff, Oscar Peredo.

Laboratorio #3

28 de Agosto del 2009

Descripción: El objetivo de este laboratorio es estudiar la estabilidad y detectabilidad de un sistema lineal. Utilizaremos el modelo utilizado en el laboratorio 2 (navegación de un barco). Las corrientes marinas son las que se mencionan en el ejercicio 2 de ese laboratorio.

Modelo

Recordemos que el modelo que explica la navegación del barco estudiado en el laboratorio 2 venía dado por:

$$X'(t) = F(t, \vec{X}) = \tilde{A}(t)\vec{X} + \tilde{G}(\vec{X}) + B\vec{U}. \tag{1}$$

donde $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top$, (x_1, x_3) y (x_2, x_4) representan la posición y la velocidad del barco, respectivamente, el control $\vec{U}(t) = (u(t), v(t))$ representa la fuerza ejercida por el motor del barco (en las direcciones de las abscisas y ordenadas, respectivamente) y

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\dot{m}(t)}{m(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\dot{m}(t)}{m(t)} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \tilde{G}(\vec{X}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{ax_1+bx_3}{m(t)} \\ 0 \\ \frac{cx_1+dx_3}{m(t)} \end{pmatrix},$$

para las siguientes configuraciones paramétricas: $a = -1$, $b = -2$, $c = 4$, $d = -5$ y $a = -1$, $b = 0$, $c = 4$, $d = -1$.

En el resto del laboratorio, supondremos que la masa es constante, i.e. $m(t) = m$ para todo t, obteniendo entonces un sistema lineal controlado:

$$\vec{X}' \;=\; A\vec{X} + B\vec{U}. \tag{2}$$

Parte A. Estabilidad y Reguladores

Ejercicio 1 ¿Existe una matríz K que satisface $\vec{U} = -K\vec{X}$ tal que los valores propios de $A - BK$ se pueden ubicar arbitrariamente? De ser posible lo anterior, el sistema (2) se puede escribir como sigue

$$\vec{X}' \;=\; (A - BK)\vec{X}. \tag{3}$$

Este tipo de controles se llama *reguladores feedback lineales*. Utilice el comando `place` para obtener una matríz de ganancia K tal que $A - BK$ sea asintóticamente estable. Para utilizar el comando `place`, debe ejecutar:

```
>> K=place(A,B,[p q r s])
```

En este caso, el vector `[p q r s]` contiene a los valores propios deseados para la matríz $A - BK$.

Ejercicio 2 Realice una descripción completa del comando `lqr`. ¿Que representan las matrices Q, R y N en el modelo de navegación del barco?

Ejercicio 3 Utilice el comando `lqr` para obtener una matríz de ganancia K tal que $A - BK$ sea estable. Para utilizar el comando `lqr`, debe ejecutar lo siguiente:

```
>> [K,KS,Ke]=lqr(S,zeros(size(A,1),size(A,2)),eye(size(B,2),size(B,2)))
```

En la variable `Ke` se guardan los valores propios de $A - BK$. Verifique usando el comando `eig` que la matriz $A - BK$ es asintóticamente estable.

Ejercicio 4 Utilizando el comando `ode45` resuelve numéricamente el sistema (2) para distintas condiciones iniciales. Grafíque las soluciones y los controles obtenidos.

Parte B. Estimadores de Estado

Ejercicio 5 Usualmente es difícil conocer completamente las variables de estado ya que sólo podemos obtener observaciones imprecisas de estas. Por ejemplo, si estamos controlando nuestro barco desde Chile, vía satélite, no podemos saber siempre su velocidad exacta y sólo podemos estimarla, por ejemplo, usando dispositivos GPS. Por esto, en lo que sigue, supondremos que solamente observamos la posición del barco (x_1, x_3) pero no su velocidad. Esto nos lleva a considerar un observador de la forma:

$$\vec{Y} \;=\; C\vec{X}. \tag{4}$$

Identifique C e $\vec{Y}$.

Definamos el estimador $\hat{\vec{X}}$ como la solución del siguiente sistema:

$$\dot{\hat{\vec{X}}}(t) \;=\; A\hat{\vec{X}}(t) + B\vec{U}(t) + L(\vec{Y}(t) - C\hat{\vec{X}}), \tag{5}$$

donde el estado inicial $\hat{\vec{X}}(0) = \hat{\vec{X}}_0$ es conocido y dado por usted y la matríz L representa la ganancia de la diferencia entre la observación y la estimación del estado.

Utilizando los comandos de los ejercicios 2 y 3, encuentre matrices L tales que el estimador $\hat{\vec{X}}$ converja asintóticamente a $\vec{X}$, o en otras palabras, que el error de estimación $\vec{e}(t) := \vec{X}(t) - \hat{\vec{X}}(t)$ converja a cero cuando $t \to +\infty$.

Ejercicio 6 Utilizando el comando `ode45` resuelva numéricamente el sistema (4) para distintas condiciones iniciales y distintos controles $\vec{U}$ (tomar funciones constantes, bang-bang y sinusoidales). Grafíque las soluciones y comparelas gráficamente con las soluciones de (2) obtenidas en el ejercicio 4.

Parte C. Conexión entre Reguladores y Estimadores

Ejercicio 7 Utilizando un control regulador feedback lineal y suponiendo que $\vec{Y} = C\vec{X}$, deduzca de las ecuaciones (3) y $\vec{e}'(t) = (A - LC)\vec{e}(t)$ (justifique esta ecuación), un sistema de la forma:

$$\begin{bmatrix} \vec{X} \\ \vec{e} \end{bmatrix}' \;=\; \tilde{A}(B, C, K, L) \begin{bmatrix} \vec{X} \\ \vec{e} \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$\vec{Y} \;=\; [C \qquad 0] \begin{bmatrix} \vec{X} \\ \vec{e} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Utilice el comando `place` para calcular matrices K y L que hagan estables a la matrices $A - BK$ y $A - LC$ (y por lo tanto a la matríz $\tilde{A}(B, C, K, L)$ ¿porqué?).

Ejercicio 8 Utilizando el comando `ode45` resuelva numéricamente el sistema (6)-(7) para distintas condiciones iniciales. Grafíque las soluciones $\vec{X}$ y los controles obtenidos y comparelas gráficamente con las soluciones de (2) obtenidas en el ejercicio 4.