MA5702 Laboratorio de Control Óptimo. Semestre 2009-2
Profesor: Héctor Ramírez C. **Auxiliares:** Julio Backhoff, Oscar Peredo.

Laboratorio #4
Filtro de Kalman Discreto

11 de Septiembre del 2009

Descripción

En este laboratorio se persigue el doble propósito de:

1. Desarrollar el trasfondo teórico básico asociado al Filtro de Kalman Discreto.
2. Modelar y analizar un par de aplicaciones utilizando el Filtro de Kalman Discreto

Parte A. Teoría del Filtro de Kalman Discreto

Considere el sistema estocástico discreto de evolución para $n \geq 0$:

$$x_{n+1} = M_n x_n + B_n u_n + F_n N_n \tag{1}$$
$$y_n = H_n x_n + D_n u_n + G_n N_n \tag{2}$$

donde x_0 sigue una distribución normal de media $\mathbb{E}x_0 = \overline{x}_0$ y matríz de covarianza $\Lambda_0 \succeq 0$. Las variables $\{N_n, n \geq 0\}$ siguen distribuciones normales standard mutuamente independientes i.e. $\mathbb{E}N_n N_m^* = 0$ para $n \neq m$ y no están correlacionadas con el valor inicial, esto es $\mathbb{E}N_n x_0^* = 0$ para todo $n \geq 0$.
Un observador $\hat{x}$ es solución del sistema

$$\hat{x}_{n+1} = M_n \hat{x}_n + B_n u_n + K_n(y_n - \hat{y}_n),\ \hat{x}_0 \text{ dado} \tag{3}$$
$$\hat{y}_n = H_n \hat{x}_n + D_n u_n \tag{4}$$

donde K_n se denomina "ganancia optimal de Kalman" y se escogerá de manera de **minimizar la varianza del error de estimación** ($e_n = x_n - \hat{x}_n$).
En lo que sigue se encontrarán fórmulas explícitas para la ganancia optimal de Kalman en cada tiempo.

Problema 1:
Encuentre la ecuación de recurrencia del error. Luego, introduciendo las matrices resolvente para $0 \leq k \leq n-1$:

$$L_{n-1,k} = \prod_{i=k}^{n-1} (M_i - K_i H_i)$$
$$L_{n-1,n} = I$$

pruebe que la ecuación de recurrencia del error se resuelve como:

$$e_n = L_{n-1,0}e_0 + \sum_{j=0}^{n-1} L_{n-1,j+1}(F_j - K_j G_j)N_j \tag{5}$$

Problema 2:
Si la varianza del error es por definición igual a:

$$P_n = \mathbb{E}(e_n - \mathbb{E}e_n)(e_n - \mathbb{E}e_n)^*. \tag{6}$$

Reemplazando (5) en (6) obtenga P_n explícitamente y verifique que satisface la recursión:

$$P_{n+1} = (M_n - K_n H_n)P_n(M_n - K_n H_n)^* + (F_n - K_n G_n)(F_n - K_n G_n)^*, \qquad P_0 = \Lambda_0. \tag{7}$$

.

Problema 3:
Denotando:

$$\begin{aligned} Q_n &= F_n F_n^* \\ R_n &= G_n G_n^* \\ S_n &= F_n G_n^* \end{aligned}$$

y asumiendo $R_n \succ 0$ se obtiene (no lo haga) que la condición necesaria para tener una varianza $\hat{P}_n$ mínima para $\hat{K}_n$ es

$$\hat{K}_n = (S_n + M_n \hat{P}_n H_n^*) E_n^{-1} \tag{8}$$

con $E_n = R_n + H_n \hat{P}_n H_n^*$. Usando la ganancia óptima (8) en la recurrencia (7) obtenga que $\hat{P}_n$ satisface

$$\hat{P}_{n+1} = M_n \hat{P}_n M_n^* - \hat{K}_n E_n \hat{K}_n^* + Q_n, \qquad \hat{P}_0 = \Lambda_0. \tag{9}$$

Note que el esquema definido por las ecuaciones (8) y (9) determina completamente la solución del Filtro de Kalman Discreto.

Parte B. Aplicaciones: Problema de Calibración de un Modelo

Una de las muchas aplicaciones del filtro de Kalman es la calibración de parámetros de modelos lineales. En este contexto, las variables de estado (no observables) son los parámetros del modelo a ajustar. La aplicación considerada en esta parte es el "Cálculo Dinámico del Value-at-Risk (VaR) de una acción".

El VaR de una acción S (dada una medida de probabilidad, un horizonte de tiempo Δt y un nivel de confianza $\alpha\,\%$) es la peor pérdida que puede tener un portafolio basado exclusivamente en la acción en un $(1-\alpha)\,\%$ de los casos, al cabo de Δt tiempo desde el presente y suponiendo que no se hacen transacciones en ese lapso. Luego el VaR es una medida de riesgo. Bajo supuestos de normalidad y varias simplificaciones, se obtiene la siguiente expresión aproximada del VaR con $\alpha = 5\,\%$, ampliamente utilizada en la práctica:

$$VaR_{\alpha=0{,}05}(S) \approx 1{,}96\sqrt{(\Delta t)\sigma^2}, \tag{10}$$

donde la varianza σ^2 se calcula sobre los retornos logarítmicos del precio de la acción $R_S = \left(\log\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right)\right)$.

Alternativamente, si se acepta el modelo **CAPM** (Capital Asset Pricing Model) se tiene la siguiente relación:

$$R_S = \delta + \beta R_M + \epsilon, \tag{11}$$

donde R_M son los retornos logarítmicos de la cartera de mercado (por ejemplo del IPSA en Chile, o el S&P500 en EE.UU.), δ una constante y ϵ es un ruido normal independiente de R_M y posee varianza $\sigma_\epsilon^2 = r$. De esto se deduce que:

$$VaR_{\alpha=0{,}05}(S) \approx 1{,}96\sqrt{\Delta t\,(\beta^2\sigma_M^2 + r)} \tag{12}$$

El problema de este enfoque es que es estático. Para introducir un comportamiento dinámico, estudios en el área sugieren hacer que el coeficiente β en (11) dependa del tiempo mediante un modelo autorregresivo de primer orden para β.

Ejercicio 1:
En adelante se considerarán las siguientes ecuaciones, inspiradas de la discusión anterior:

$$R_S(t) = \delta + R_M(t)\left(\beta(t) + \overline{\beta}\right) + \epsilon(t) \tag{13}$$

$$\beta(t) = Z\beta(t-1) + w(t) \tag{14}$$

Aquí, $\beta(t)$ es el estado del sistema, $R_S(t)$ es el observable y $w(t)$ es un ruido normal de varianza $Q := \sigma_w^2$ conocida. Asuma por ahora que $R_M(t)$ (que no es constante) y $\overline{\beta}$ (que sí es constante) son conocidos.
Escriba este sistema en la forma (1)-(2).

.

Ejercicio 2:
En **U-Cursos** puede encontrar la información correspondiente a la serie de retornos logarítmicos diarios del mercado (IPSA) y de una acción (SQM), correspondientes a 100 días hábiles después desde el 22-09-2003. Note entonces que las observaciones ($y(t)$) **son conocidas** y corresponden a la serie de retornos logarítmicos de SQM ($R_S(t)$). Un estudio estadístico de estos datos determinó que se pueden asumir los siguientes valores para las constantes del sistema, las que se eligieron de manera de explicar las observaciones mediante el criterio de maximizar su verosimilitud:

$$\begin{aligned} Z &= 0{,}2 \\ Q &= 3{,}2 * 10^{-7} \\ \delta &= -3{,}7 * 10^{-6} \\ r &= 2 * 10^{-11} \\ \overline{\beta} &= 1 \end{aligned}$$

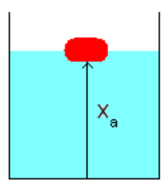
Programe el Filtro de Kalman Discreto (ver (8)-(9)).

Ejercicio 3:
Ocupando el código de la parte anterior, discuta sobre la calidad del resultado entregado por el método (por ejemplo, ¿las observaciones estimadas se aproximan a las observaciones reales?).

Ocupando los valores estimados de $\beta(t)$ calcule el VaR en el instante final. ¿Qué interpretación tiene este valor?. Explique, a la luz de las series de datos, la razón de ser de este valor.

Parte C. Aplicaciones: Estimación de un Sistema mediante Filtro de Kalman

Sea x_a la altura del objeto flotante de la figura y $x_T = \frac{dx_a}{dt}$ la tasa a la que esta cambia. Considere el vector de estado del sistema $x = (x_a \ x_T)^\top$.



Ejercicio 4:
Asumiendo que la dinámica es a tiempo continuo y que $\frac{dx_T}{dt} = 0$ encuentre el sistema dinámico que sigue el objeto. Encuentre luego una dinámica discreta, considerando una discretización del tiempo de tamaño δt. Finalmente, asuma que sólo la altura del objeto es observable, agregue ruido a las ecuaciones y explicite la forma del sistema como en (1)-(2).

Ejercicio 5:
Ahora deberá estimar el estado del sistema mediante la implementación del Filtro de Kalman incorporada en el Toolbox de control de Matlab. Para esto, investigue los comandos **ss**, **kalman** y **lsim**. Programe un código que a partir de los parámetros que usted estime convenientes (por ejemplo δt y/o la varianza de los ruidos) y ocupando las funciones recién mencionadas, permita estimar el estado del sistema.

Ejercicio 6:
Discuta acerca de la calidad de la estimación mediante filtraje de Kalman abordando, por ejemplo, la dependencia de esta con el tamaño de la discretización, horizonte de tiempo, varianzas de los ruidos, etc. Estudie también la tasa (x_T) estimada. ¿Puede explicar estas dependencias?