MA5702 Laboratorio de Control Óptimo. Octubre 2009-2
Profesor: Héctor Ramírez C. **Auxiliares:** Julio Backhoff, Oscar Peredo.

Laboratorio #5
Problemas de Tiempo Mínimo

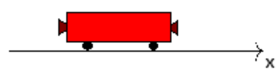
Octubre de 2009

Descripción

En este laboratorio se resolverá numéricamente dos problemas de control óptimo a tiempo mínimo. Se introducirán dos métodos: el directo y el indirecto (ambos se basan en el Principio del Máximo de Pontryagin (**PMP**)).

Parte A. Control de un carro-cohete en tiempo mínimo y método de resolución directo

Un carro-cohete se encuentra en reposo en el punto $x_0 = 1$. La idea de esta parte es llevarlo en tiempo mínimo al origen ($x_f = 0$) con velocidad final nula. Lo anterior se debe lograr solo controlando su aceleración, la que puede tomar valores en $[-1, 1]$.



Problema 1:
Modele el problema de tiempo mínimo descrito considerando como estado el vector (x, y), donde x es la posición del carro e y su velocidad. Deduzca a partir de lo que ha aprendido en clases que el control óptimo para este problema es de tipo Bang-Bang y que sólo existe un instante de conmutación para este control.

La idea ahora es resolver el problema de control a tiempo mínimo **directamente**, reduciéndolo tras discretización a un problema de optimización no lineal de dimensión finita.

Problema 2:
Discretice (de forma equidistribuída) en N puntos la dinámica del problema en el intervalo de tiempo $[0, t_f]$ (note que t_f no es conocido, de hecho se desea minimizarlo) mediante la fórmula de discretización de Euler. Notando que las variables en el problema discretizado son t_f y $\{u(i)\}_{i=1}^N$ (donde $u(i)$ denota el valor del control en el i-ésimo punto de la discretización de $[0, t_f]$), escriba el problema de optimización no lineal de dimensión finita asociado (en la forma especificada en el *help* de *fmincon*).

Indicación: Estudie el comando *fmincon* del toolbox de optimización de MATLAB.

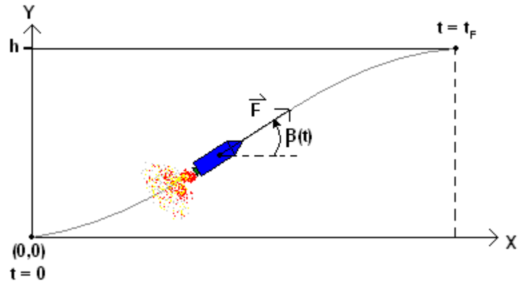
Problema 3:
Resuelva el problema discretizado con $N = 20$. Grafique la trayectoria (discretizada) óptima y el control (discretizado) óptimo en $[0, t_f]$. Comente la solución obtenida.

NOTA: El método descrito en esta parte se conoce como "Método Numérico Directo". Este tipo de métodos se caracterizan por ser de fácil implementación e interpretación, pero adolecen de problemas de dimensionalidad (para mejorar la calidad de la solución se debe incrementar N) y posiblemente el problema no lineal de dimensión finita posea varios mínimos locales.

.

Parte B. Despegue de un cohete en tiempo mínimo y método de resolución indirecto

Un cohete de masa M (constante) se encuentra en reposo $((\dot{x}, \dot{y}) = (0,0))$ en el origen $((x, y) = (0,0))$ en el tiempo inicial $t_0 = 0$. Tras su despegue, este está sujeto a las fuerzas de gravedad y a la generada por sus propulsores ($\vec{F} = m\vec{\gamma}$). Suponga que el módulo γ del vector $\vec{\gamma}$ es constante, pero que se tiene control sobre el ángulo $\beta(t)$ entre el eje horizontal y $\vec{\gamma}$, tal como se muestra en la siguiente figura:



El objetivo de esta parte es llevar el cohete en **tiempo mínimo** (t_f) a la altura $h = 1000(m)$, con velocidad vertical final nula ($V_y = 0\left(ms^{-1}\right)$) y velocidad horizontal final de crucero ($V_x = 222\left(ms^{-1}\right) = 800\left(Kmh^{-1}\right)$). Asuma que $g = 9{,}8\left(ms^{-2}\right)$ y $\gamma = 10\left(ms^{-2}\right)$.

Problema 4:
Considere el vector de estado del sistema (x, y, v_x, v_y). ¿Qué dinámica sigue este vector? Formule matemáticamente el problema de control óptimo descrito antes. Finalmente, introduciendo los controles auxiliares $u_1(t) = \cos(\beta(t))$ y $u_2(t) = \mathrm{sen}(\beta(t))$ reformule el problema de control óptimo. ¿Qué ventaja tiene esta reformulación?

Problema 5:
Encuentre el Hamiltoniano del sistema $H((x, y, v_x, v_y), (u_1, u_2), (p_1, p_2, p_3, p_4))$ y escriba las condiciones necesarias del **PMP** (optimalidad del Hamiltoniano, dinámica adjunta y condiciones de transversalidad). Con lo anterior muestre que:

$$\begin{aligned}
p_1(t) &= 0 \\
p_2(t) &= c_2 \\
p_3(t) &= c_3 \\
p_4(t) &= -c_2 t + c_4
\end{aligned}$$

donde los c_i son constantes. Notando que $c_3 \neq 0$ y definiendo $k_1 := \frac{c_2}{|c_3|}$, $k_2 := -\frac{c_4}{|c_3|}$, muestre que

$$\begin{aligned}
u_1(t) &= \frac{\epsilon}{\sqrt{1 + (k_1 t + k_2)^2}} \\
u_2(t) &= \frac{k_1 t + k_2}{\sqrt{1 + (k_1 t + k_2)^2}}
\end{aligned}$$

donde $\epsilon = -signo(c_3)$.

.

Problema 6:
Introduciendo los controles determinados en la parte anterior en las ecuaciones de estado, obtenga que:

$$
\begin{aligned}
v_x(t) &= \frac{\gamma\epsilon}{k_1}[arcsenh(k_1 t + k_2) - arcsenh(k_2)] \\
v_y(t) &= \frac{\gamma}{k_1}\left[\sqrt{1+(k_1 t + k_2)^2} - \sqrt{1+k_2^2}\right] - gt \\
x(t) &= \frac{\gamma\epsilon}{k_1^2}\left[(k_1 t + k_2)arcsenh(k_1 t + k_2) - \sqrt{1+(k_1 t + k_2)^2} - k_2 arcsenh(k_2) + \sqrt{1+k_2}\right] - \frac{\gamma\epsilon}{k_1}arcsenh(k_2)t \\
y(t) &= \frac{\gamma}{2k_1^2}\left[(k_1 t + k_2)\sqrt{1+(k_1 t + k_2)^2} + arcsenh(k_1 t + k_2) - k_2\sqrt{1+k_2^2} - arcsenh(k_2)\right] - \frac{1}{2}gt^2 - \left(\frac{\gamma}{k_1}\sqrt{1+k_2^2}\right)t
\end{aligned}
$$

Deduzca que necesariamente $\epsilon = 1$

Problema 7:
Note que las constantes k_1,k_2 y t_f están determinadas por las 3 ecuaciones no lineales $y(t_f) = h$, $v_x(t_f) = V_x$ y $v_y(t_f) = 0$. Estudie el comando *fsolve* y empléelo para encontrar los valores de estas constantes. Se sugiere considerar como condición inicial para el método $\left(\hat{k_1}, \hat{k_2}, \hat{t_f}\right) = (-2 * 10^{-3}, 5, 400)$.

Problema 8:
Ocupando los valores de las constantes recién encontrados, grafique las variables de estado en el intervalo $[0, t_f]$. Grafique además el ángulo óptimo $\beta(t)$ en dicho intervalo. Comente.

NOTA: En esta parte, gracias a la ayuda del PMP, la resolución numérica del problema se redujo a encontrar los ceros de un sistema de ecuaciones no lineales. Este es un “Método Numérico Indirecto”, en contraposición al método sugerido en la parte A de este laboratorio. Otro ejemplo de un método de esta índole es emplear y resolver numéricamente las ecuaciones de **Hamilton-Jacobi-Bellman**, lo que se verá más adelante en el curso.