MA5702 Laboratorio de Control Óptimo. Octubre 2009-2
Profesor: Héctor Ramírez C. **Auxiliares:** Julio Backhoff, Oscar Peredo.

Laboratorio #7
Ecuaciones de HJB

6 de Noviembre de 2009

Descripción

En este laboratorio se presentará la relación existente entre las ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman (**HJB**) y el contol óptimo. Se analizará un problema de control óptimo resolviendo numéricamente una de estas ecuaciones.

Parte A. Ecuación de HJB en Control Óptimo: Una introducción

Caso Evolutivo

Sea $T > 0$ y x_0 fijos y A compacto. Consideremos, para $t \leq T$ y $x \in \mathbb{R}^n$, el problema $\mathbf{(P(t,x))}$ como:

$$\begin{aligned} \dot{x_u}(s) &= f(x_u(s), u(s)) \ , \forall s \in (0,t) \\ x_u(0) &= x_0 \\ x_u(t) &= x \end{aligned}$$

El problema de control óptimo consiste en minimizar $C(t,u) = \int_0^t f^0(x(s),u(s))ds$, donde $\mathbb{A}$ es el conjunto de controles admisibles (aquellos que toman valores en A).
Se define $\forall \leq T$ y $\forall x$ la **función valor** como:

$$V(t,x) = \text{ínf}\left\{C(t,u) | x_u \text{ es solución de } \mathbf{(P(t,x))}\right\}$$

Ahora consideremos la siguiente ecuación de evolución:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + \hat{H}\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) &= 0 \ , \text{en } [0,T] \times \mathbb{R}^n \\ S(0,x_0) &= 0 \\ S(0,x) &= \infty \ , \text{si } x \neq x_0 \end{aligned}$$

donde $\hat{H}(x,p) = \text{máx}_{v \in A}\left(< p, f(x,v) > - f^0(x,v)\right)$.
Esta ecuación se conoce como la **Ecuación de HJB** del problema. Su importancia radica en que bajo condiciones razonables sobre las funciones involucradas (por ejemplo si f y f^0 son acotadas en ambas variables y uniformemente Lipschitz con respecto a la variable de estado), entonces la función valor del problema es la única solución (en algún sentido) de la ecuación.
Aún más, al aplicar el PMP en conjunto con HJB, resulta que el estado adjunto está dado por $p(t) = \frac{\partial V}{\partial x}(t, x(t))$ (cuando la derivada tiene sentido) y luego, como por PMP $u(s) = u(x(s), p(s))$, se obtiene una expresión en forma feedback para el control óptimo. En este laboratorio trabajaremos con soluciones derivables c.t.p de las ecuaciones.
NOTA: En esta parte el enfoque considerado fue dejar el punto inicial fijo y el final libre. En la literatura es usual la situación opuesta (poco cambia en las ecuaciones).

Caso estacionario (Control de Tiempo Mínimo)

En el caso de un problema de control de tiempo mínimo (es decir, ya no se puede tomar T fijo como antes), se obtiene igualmente una ecuación de HJB, que de hecho resulta ser estacionaria.
Se considera el problema $\mathbf{(P(x))}$:

$$\begin{aligned} \dot{x_u}(s) &= f(x_u(s), u(s)) \ , \forall s \in (0,t) \\ x_u(0) &= x_0 \\ x_u(t) &= x \end{aligned}$$

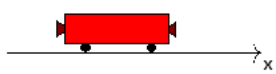
En este caso el problema de control óptimo es minimizar el tiempo t y la función valor es $T(x) = \text{ínf}\{t | x_u$ es solución de $\mathbf{(P(x))}$ $\}$
Similarmente a la parte anterior, aparece una ecuación de HJB asociada a este problema:

$$\begin{aligned} \max_{v \in A} < \nabla S(x), f(x,v) > &= 1 \ , \text{en } \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\} \\ S(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

e igualmente bajo condiciones razonables sobre los ingredientes, la función valor $T(\cdot)$ resulta ser la única solución de la ecuación.

Parte C. Estudio analítico del Carro-Cohete mediante HJB

Un carro-cohete se encuentra en reposo en el origen. La idea es llevarlo en tiempo mínimo al punto x con velocidad final y. Lo anterior se debe lograr sólo controlando su aceleración, la que puede tomar valores en $[-1, 1]$.



Problema 1:
Modele el problema de tiempo mínimo descrito considerando como estado el vector (X, Y), donde X es la posición del carro e Y su velocidad. Sólo ocupando el PMP, muestre que la función valor de este problema es:

$$T(x,y) = \begin{cases} 2\sqrt{\frac{y^2}{2} + x} - y & \text{si } x \geq \frac{y^2}{2} signo(y) \\ 2\sqrt{\frac{y^2}{2} - x} + y & \text{si } x < \frac{y^2}{2} signo(y) \end{cases} \tag{1}$$

Encuentre una expresión para el instante de conmutación del control. Luego establezca cómo obtener el control óptimo a partir de este tiempo y del hecho que $p(t) = \nabla T(x(t), y(t))$ (cuando T es diferenciable).

Problema 2:
Encuentre la ecuación de HJB que debería resolver la función valor del problema. Verifique que de hecho $T(\cdot)$ resuelve esta ecuación c.t.p.

Parte D. Estudio numérico del Carro-Cohete mediante HJB

En esta parte se resolverá la ecuación de HJB asociada al problema del carro-cohete que encontró en la parte anterior.
Para hacerlo, primeramente se debe escoger un intervalo para las variables y discretizarlo: $X_h = [x_{min} : hx : x_{max}]$ y $Y_h = [y_{min} : hy : y_{max}]$. Llamemos $x_i \in X_h$ y $y_j \in Y_h$ los puntos en estas mallas.
Considere las siguientes aproximaciones descentradas:

$$y_j \frac{\partial S}{\partial x}(x_i, y_j) = \begin{cases} \frac{y_j}{h_x} \left(S_{i,j} - S_{i-1,j}\right) & \text{si } y_j \geq 0 \\ \frac{y_j}{h_x} \left(S_{i+1,j} - S_{i,j}\right) & \text{si } y_j < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial S}{\partial y}(x_i, y_j) \right| &= \frac{1}{h_y} \max \{0, S_{i,j} - S_{i,j+1}, S_{i,j} - S_{i,j-1}\} \\ &= \frac{1}{h_y} \left(S_{i,j} - \min \{S_{i,j-1}, S_{i,j+1}\}\right)_+ \end{aligned}$$

donde $S_{i,j} := S(x_i, y_j)$. En adelante se llamará $m := \min \{S_{i,j-1}, S_{i,j+1}\}$.

Problema 3:
Encuentre expresiones cerradas del estilo $S_{i,j} = L(h_x, h_y, m, S_{i-1,j}, S_{i+1,j})$, donde la forma de L dependerá del signo de y_j y del de $(S_{i,j} - m)$.

Note ahora que lo que usted ha encontrado es una ecuación tipo *punto fijo*: $S = \mathbb{L}(S)$, donde S es la matriz de componentes $S_{i,j}$. Por lo tanto, bajo ciertos valores de los parámetros involucrados, se tiene que a partir de una condición inicial S^0, la secuencia $S^{n+1} = \mathbb{L}(S^n)$ cumple que $\lim S^n$ converge al punto fijo de $\mathbb{L}$ y luego soluciona el problema discretizado.

Problema 4:
Escriba un código que implemente lo recién descrito. Para esto deberá darse una condición inicial S^0 definida sobre X_h e Y_h.
Indicación: Note que la ecuación de HJB está definida en $R^2 \setminus \{(0,0)\}$ (que es no acotado), mas el esquema numérico está definido en $X_h \times Y_h$ (que es acotado). Se sugiere que las iteraciones $S^{n+1} = \mathbb{L}(S^n)$ se lleven a cabo sólo al interior de $X_h \times Y_h$, y que por lo tanto los valores de S^n sean constantes e iguales a los de S^0 en el borde de $X_h \times Y_h$.

Problema 5:
Programe una función que implemente la solución exacta del problema, dada por (1). Estudie gráficamente la calidad de aproximación del método numérico del problema anterior. Varíe los parámetros del algoritmo y comente.